Тема 4. Уравнения движения самолета

1 Основные положения. Системы координат

1.1 Положение самолета

Под положением самолета понимается положение его центра масс O. Положение центра масс самолета принято определять относительно Земли в так называемой *нормальной земной системой координат*.

За нормальную земную систему координат принимается правая ортогональная система координат $O_0X_gY_gZ_g$, которая жестко связана с Землей и считается инерциальной. Начало отсчета этой системы располагается на поверхности Земли в произвольно обусловленной точке O_0. Ось O_0X_g является касательной к поверхности Земли в этой обусловленной точке, проведенной в произвольном направлении (предпочтительно в сторону полета). Ось O_0Y_g перпендикулярна поверхности Земли и направлена по местной вертикали вверх. Ось O_0Z_g перпендикулярна вертикальной плоскости $O_0X_gY_g$ и образует правую тройку осей, т. е. направлена вправо от избранного положительного направления O_0X_g (рис. 1.1). Ось O_0Z_g как и ось O_0X_g является касательной к поверхности Земли, но в направлении ей перпендикулярном.

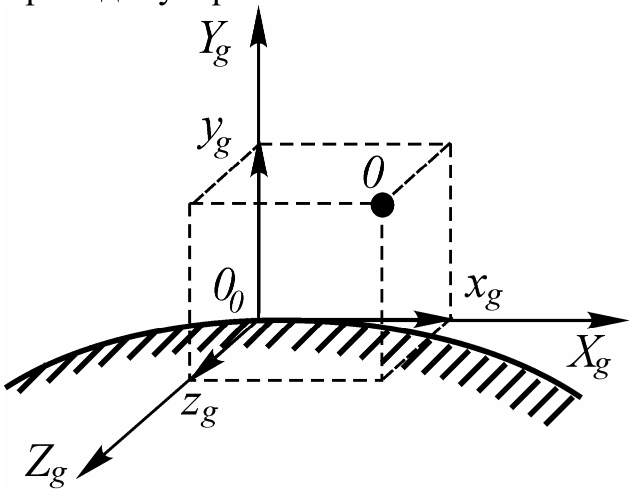


Рис. 1.1 Положение тела в земной системе координат

При рассмотрении движения самолетов обычно делается допущение о том, что Земля является плоской, т. е. пренебрегается кривизной поверхности Земли. В этом случае местная горизонтальная плоскость $O_0X_gZ_g$ будет совпадать с поверхностью Земли, а оси O_0X_g и O_0Z_g будут лежать на ней.

Положение самолета относительно Земли в нормальной земной системе координат определяется координатами центра масс O (x_g, y_g, z_g). Когда ось OX_g направлена в сторону полета, то координата x_g характеризует дальность полета L, координата y_g — высоту полета H, а координата z_g — боковое смещение.

1.2 Ориентация самолета

Под ориентацией самолета понимается направление осей ортогоальной системы координат, жестко связанной с самолетом.

Система координат, жестко связанная с самолетом, называется *связанной системой координат* ($OXYZ$). Связанная система координат, как и все другие рассматриваемые системы, является правой ортогональной системой координат.

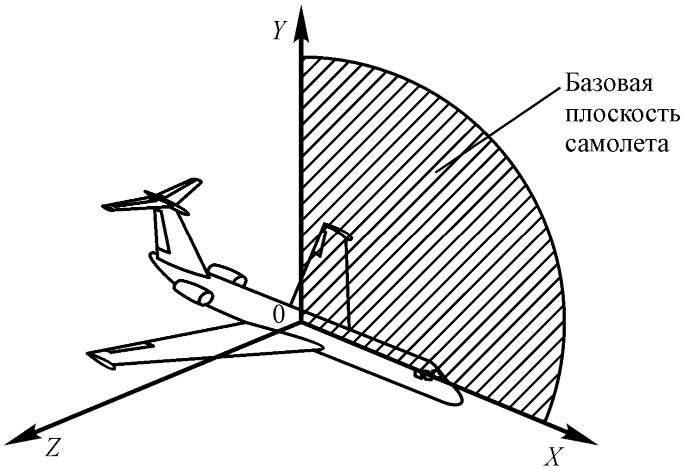


Рис. 1.2 Расположение самолета в связанной системе координат

Самолет принято ориентировать относительно Земли. Для этого необходимо задать направление осей связанной системы координат относительно осей земной системы координат.

Ориентация самолета производится с помощью углов Эйлера связанной системы координат: рыскания ψ, тангажа ϑ и крена γ, путем перехода от земной системы координат к связанной посредством трех последовательных правых поворотов по часовой стрелке для наблюдателя, смотрящего в положительном направлении (рис. 1.4).

Угол между осью $0X_g$ и проекцией оси $0X$ на горизонтальную плоскость X_g0Z_g называется *углом рыскания* и обозначается ψ. Угол между продольной осью $0X$ и горизонтальной плоскостью X_g0Z_g называется *углом тангажа* и обозначается ϑ. Угол между поперечной осью $0Z$ и горизонтальной плоскостью X_g0Z_g называется *углом крена* и обозначается γ.

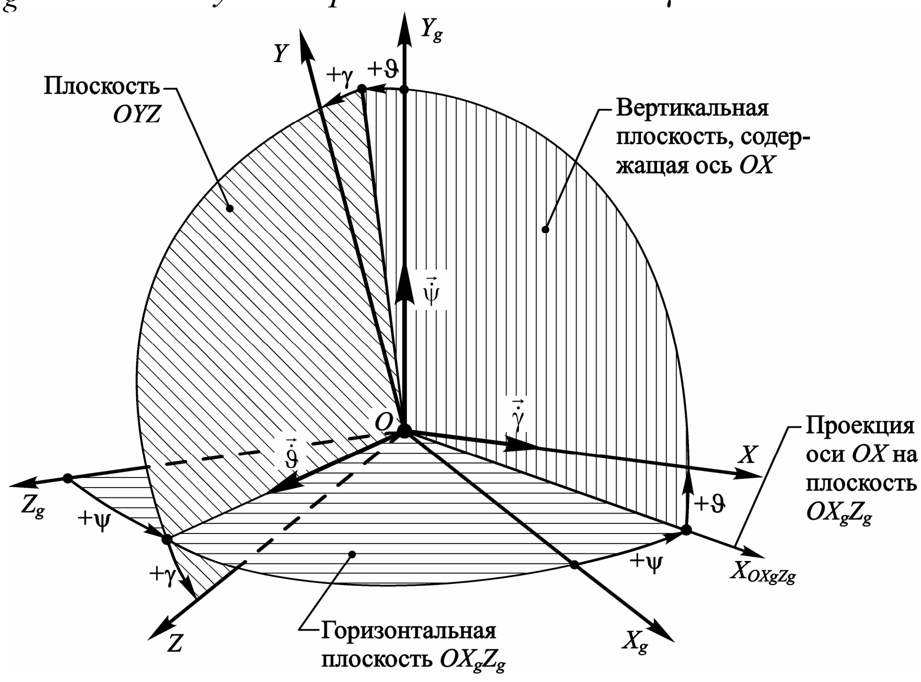


Рис. 1.4 Связь между осями земной и связанной систем координат

1.3 Скорость самолета

Поступательное движение самолета характеризуется его скоростью. Под скоростью самолета понимается скорость его центра масс относительно воздуха. Еще эта скорость называется *воздушной скоростью* и обозначается $\overline{V}$. Именно эта скорость создает подъемную силу и поэтому входит в аэродинамические формулы.

Помимо воздушной скорости, еще есть понятие *земной скорости* $\overline{V}_{\text{к}}$, то есть скорости центра масс самолета относительно Земли (земной системы координат).

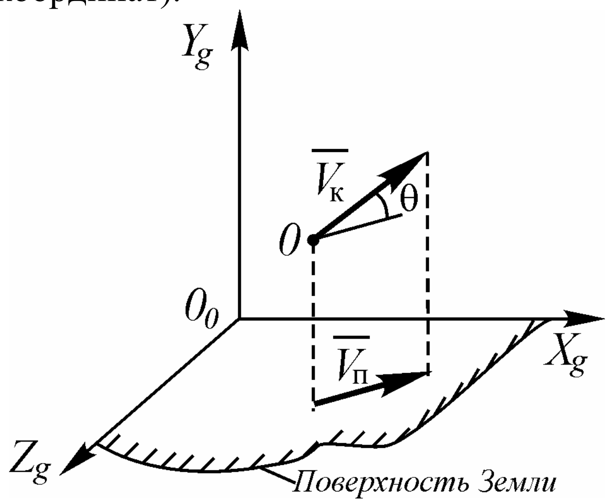


Рис. 1.5. Земная и путевая скорости ЛА

Очевидно, что если воздушная среда покоится (т.е. ветер отсутствует), то воздушная и земная скорости одинаковы $\overline{V} = \overline{V}_{\text{к}}$. Проекция земной скорости $\overline{V}_{\text{к}}$ на горизонтальную плоскость X_g0Z_g земной системы координат дает так называемую *путевую скорость* $\overline{V}_{\text{п}}$ (рис. 1.5), которая используется при расчете дальности полета самолета.

Воздушная среда сама может находиться в движении. Для характеристики движения воздуха вводится понятие *скорость ветра* $\overline{W}$, то есть скорость среды относительно земной системы координат. Составляющие скорости ветра по осям системы координат $0X_gY_gZ_g$:

$$\overline{W} = \overline{W}_x + \overline{W}_y + \overline{W}_z, \tag{1.1}$$

где $\overline{W}_x$ — попутная (встречная) составляющая ветра; $\overline{W}_y$ — восходящая (нисходящая) составляющая ветра (восходящий или нисходящий поток); $\overline{W}_z$ — боковая составляющая ветра.

Изучение движения самолета будем проводить в предположении, что воздушная среда находится в покое, ветер отсутствует ($\overline{W} = 0$) и, следовательно, $\overline{V} = \overline{V}_{\text{к}}$.

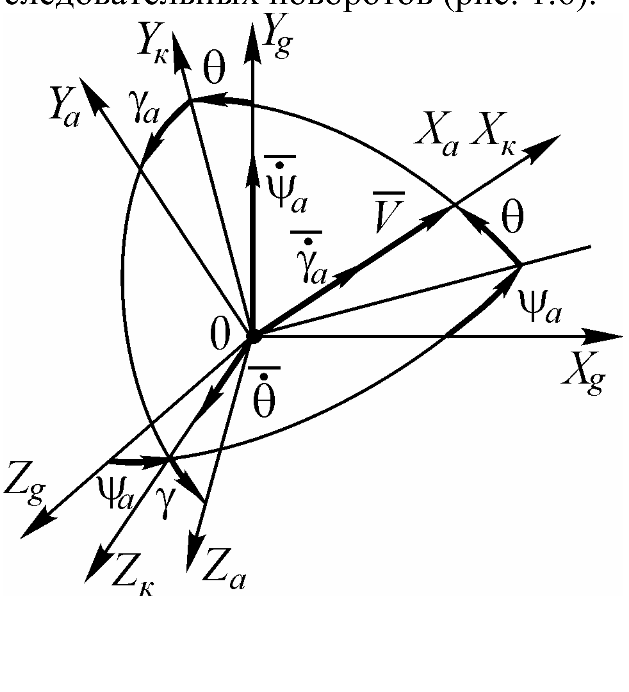
1.4 Направление движения ЛА

Под направлением движения самолета (считаем, что ветер отсутствует) понимается ориентация вектора скорости $\overline{V}$ центра масс самолета или осей ортогональной системы координат, ось OX которой совпадает с вектором скорости. При исследовании движения самолета как материальной точки наибольшее применение нашли две системы координат, оси *OX* которых совпадают с вектором линейной скорости самолета: скоростная и траекторная.

Начало *скоростной системы координат* $OX_aY_aZ_a$ совпадает с центром масс самолета, ось OX_a направлена по вектору скорости самолета и называется *скоростной осью*; ось OY_a перпендикулярна вектору скорости, лежит в плоскости симметрии самолета, направлена вверх и называется *осью подъемной силы*; ось OZ_a образует правую тройку, она также перпендикулярна вектору скорости, но направлена в сторону правого крыла и называется *боковой осью*.

Траекторная система координат $OX_KY_KZ_K$ — это такая система координат, начало отсчета которой находится в центре масс самолета; ось OX_K совпадает с вектором линейной скорости $\overline{V}$, ось OY_K перпендикулярна вектору скорости $\overline{V}$, но лежит в вертикальной плоскости, содержащей вектор линейной скорости, и направлена вверх; ось OZ_K перпендикулярна вектору скорости, направлена в сторону правого крыла самолета и лежит в горизонтальной плоскости. Задать направление движения самолета (другими словами, ориентировать вектор воздушной скорости $\overline{V}$) можно путем ориентации осей траекторной или скоростной системы координат. Ориентация осей скоростной системы координат осуществляется как относительно Земли (т. е. осей земной системы координат), так и относительно самого самолета (т. е. осей связанной системы координат).

Ориентация вектора скорости самолета относительно Земли. Ориентация вектора скорости $\overline{V}$ или связанной с ним скоростной системы координат $OX_a\ Y_aZ_a$ относительно Земли производится с помощью трех углов Эйлера скоростной системы координат, аналогичных углам Эйлера связанной системы координат, т. е. скоростного угла рыскания ψ_a, угла наклона траектории θ_a и скоростного угла крена γ_a, путем перехода от осей земной системы координат к осям скоростной системы координат посредством трех последовательных поворотов (рис. 1.6).



Траекторная система координат отличается от скоростной тем, что она не имеет крена ($\gamma_a = 0$), а сам вектор воздушной скорости $\overline{V}$ в той и другой системах координат ориентируется двумя углами: скоростного рыскания ψ_a и наклона траектории θ.

Рис. 1.6. Связь между скоростной и земной системами координат

1.5 Силы, действующие на самолет, и их задание

Все силы, действующие на самолет (в свободном полете), можно свести к трем силам: силе тяжести $\overline{G}$, тяге силовой установки $\overline{P}$ и аэродинамической силе планера $\overline{R}_A$.

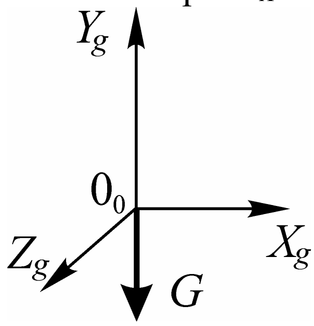


Рис. 2.1. Задание силы тяжести в земной системе координат

Сила тяжести $\overline{G}$ является равнодействующей сил ньютоновского притяжения (гравитационной силы) и внешней центробежной силы, обусловленной вращением Земли. Она численно равна весу самолета $G = mg$.

$$
\begin{aligned}
&G_{x_g} = 0;\\
&G_{y_g} = -G = mg;\\
&G_{z_g} = 0.
\end{aligned}
\qquad (2.4)
$$

Сила тяжести обычно задается в земной системе координат (рис. 2.1) и ее проекции на оси этой системы координат определяются по формулам (2.4).

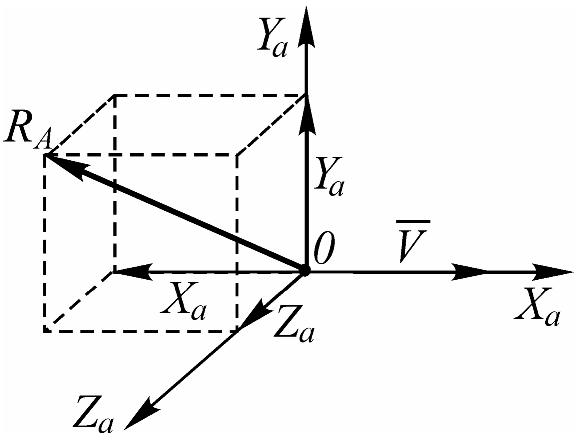
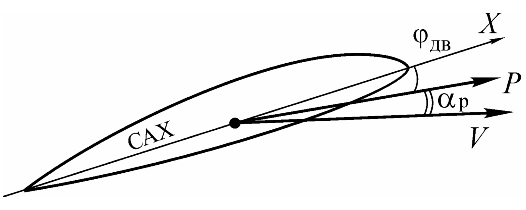


Рис. 2.2. Проекции полной аэродинамической силы на оси скоростной системы координат

Аэродинамическая сила планера $\overline{R}_A$ (или просто аэродинамическая сила) является результатом воздействия внешнего потока воздуха на самолет. Удобней всего задать аэродинамическую силу в скоростной системе координат (рис. 2.2):

$$
\begin{aligned}
&R_{A x_a} = -X_a;\\
&R_{A y_a} = Y_a;\\
&R_{A z_a} = Z_a.
\end{aligned}
\qquad (2.5)
$$

Сила тяги силовой установки (или просто тяга) $\overline{P}$ — это сила, действующая на самолет со стороны силовой установки в результате ее функционирования. Тяга имеет реактивную природу.



Вектор тяги силовой установки (в нормальном полете) находится в вертикальной плоскости симметрии самолета, и направление $\overline{P}$ задается углом установки двигателя в этой плоскости $\varphi_{дв}$, т. е. углом между продольной осью OX (или САХ крыла) и осью двигателя (рис. 2.3). Тем самым тяга силовой установки задается в связанной системе координат.

Рис. 2.3. Задание силы тяги в связанной системе координат

Для получения уравнений движения самолета найдем составляющие вектора $\overline{P}$ по осям скоростной системы координат (рис. 2.4):

$$P_{x_a} = P\cos\alpha_{р}\cos\beta \cong P;$$
$$P_{y_a} = P\sin\alpha_{р} \cong P\alpha_{р}; \qquad (2.6)$$
$$P_{z_a} = -P\cos\alpha_{р}\sin\beta \cong -P\beta,$$

где $\alpha_р = \alpha - \varphi_{дв}$ – угол атаки реактивной силы.

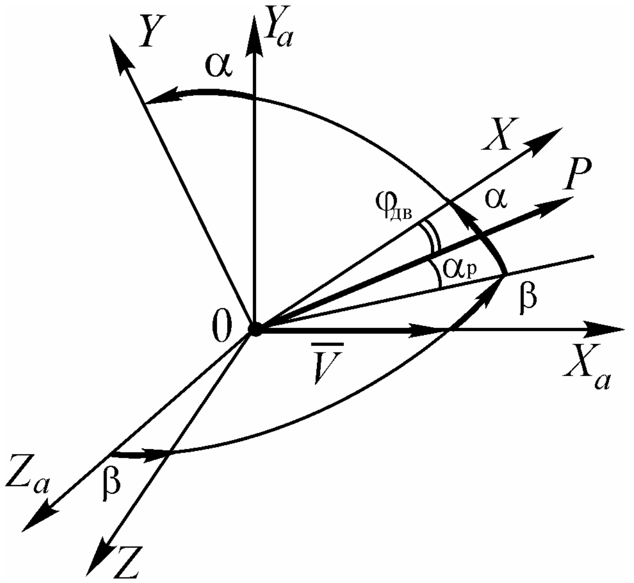


Рис. 2.4. Задание силы тяги в скоростной системе координат

Благодаря несовпадению вектора тяги $\overline{P}$ с вектором скорости V возникает подъемная сила, равная $P\alpha_р$, и боковая сила (в случае скольжения), равная $-P\beta$.

Зная ориентацию осей скоростной системы координат относительно осей земной системы координат, все силы, действующие на самолет, можно представить следующим образом (рис. 2.5).

По оси OX_a скоростной (или траекторной, так как они по определению совпадают) системы координат будет действовать разность сил тяги P и лобового сопротивления X_a (т. е. $P — X_a$); по оси OY_a скоростной системы координат — суммарная подъемная сила (аэродинамическая Y_a и реактивная $P\alpha_р$, т. е. $Y_a + P\alpha_р$); по оси OZ_a скоростной системы координат — суммарная боковая сила (аэродинамическая Z_a и реактивная $P\beta$, т.е. $Z_a — P\beta$); по оси OY_g земной системы координат — сила тяжести G, для удобства направим ее вверх со знаком минус.

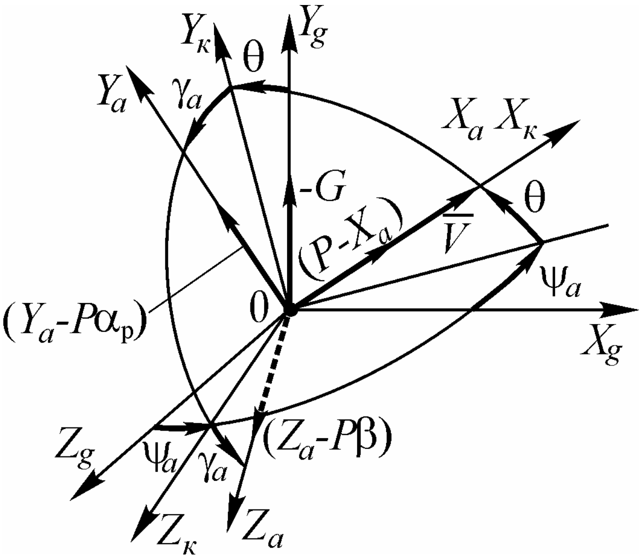


Рис. 2.5. Проекции всех сил, действующих на ЛА в скоростной системе координат

Исходя из рис. 2.5 легко определить проекции всех сил, действующих на самолет, на оси траекторной системы координат (в этой системе координат мы будем составлять уравнения движения):

$$
\begin{aligned}
F_{x_a} &= \sum F_{ix_к} = P - X_a - G\sin\theta; \\
F_{y_a} &= \sum F_{iy_к} = (Y_a + P\alpha_р)\cos\gamma_a - (Z_a - P\beta)\sin\gamma_a - G\cos\theta; \\
F_{z_a} &= \sum F_{iz_к} = (Y_a + P\alpha_р)\sin\gamma_a + (Z_a - P\beta)\cos\gamma_a.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

После определения сил, действующих на самолет, составим уравнения движения центра масс самолета, т. е. уравнения сил.

Для составления уравнений сил воспользуемся теоремой из механики об изменении количества движения системы, согласно которой производная по времени от количества движения системы Q равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum \overline{F}_i . \tag{2.8}$$

Самолет является системой переменной массы. Однако при изучении движения самолета уравнения его движения в произвольный момент времени t могут быть записаны в форме уравнений движения твердого тела постоянной массы. Предполагается, что тело как бы затвердело в момент времени t, т. е. перестало захватывать частицы из окружающей среды и выбрасывать их в окружающую среду. К полученному таким образом фиктивному твердому телу необходимо приложить внешние силы, действующие на него, и их моменты, реактивные Силы и их моменты, кориолисовы силы и их моменты, центробежные силы и их моменты.

Используя этот принцип, левую часть уравнения (2.8) можно записать

$$\frac{d}{dt}\left(m\overline{V}\right) = m\frac{d\overline{V}}{dt} . \tag{2.9}$$

Будем рассматривать движение не в абсолютной, а в относительной системе координат. За относительную систему координат примем траекторную систему, где уравнения сил получаются наиболее простыми. После преобразований, представленных в [1], получим *уравнения сил* в проекциях на эту систему координат (кориолисовыми и центробежными силами пренебрегаем):

$$m\frac{d\overline{V}}{dt} = \sum F_{ix_к} = P - X_a - G\sin\theta;$$
$$mV\dot{\theta} = \sum F_{iy_к} = (Y_a + P\alpha_р)\cos\gamma_a - (Z_a - P\beta)\sin\gamma_a - G\cos\theta; \qquad (2.10)$$
$$-mV\dot{\psi}_a\cos\theta = \sum F_{iz_к} = (Y_a + P\alpha_р)\sin\gamma_a + (Z_a - P\beta)\cos\gamma_a,$$

где сумма угловой скорости скоростного рыскания $\overline{\dot{\psi}}_a$ и угловой скорости наклона траектории $\overline{\dot{\theta}}$ равна угловой скорости скоростной системы координат $\overline{\omega}_к$.

Система (2.10) устанавливает связь скорости самолета V с проекциями вектора суммарной силы на траекторные оси.

Уравнения движения самолета — это система двенадцати дифференциальных уравнений [системы (2.2), (2.3), (2.10), (2.12)], определяющих:

- величину и направление вектора скорости ЛА – уравнения сил (2.10):

$$m\frac{d\overline{V}}{dt} = P - X_a - G\sin\theta;$$
$$mV\dot{\theta} = (Y_a + P\alpha_р)\cos\gamma_a - (Z_a - P\beta)\sin\gamma_a - G\cos\theta; \qquad (2.13а)$$
$$-mV\dot{\psi}_a\cos\theta = (Y_a + P\alpha_р)\sin\gamma_a + (Z_a - P\beta)\cos\gamma_a.$$

- положение самолета относительно Земли – уравнения кинематических связей линейных скоростей (2.3):

$$\dot{x}_g = V\cos\theta\cos\psi_a;$$
$$\dot{y}_g = V\sin\theta; \qquad (2.13б)$$
$$\dot{z}_g = -V\cos\theta\sin\psi_a.$$

- величину и направление вектора угловой скорости - уравнения моментов (2.12):

$$I_x\dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z(I_y - I_z) + I_{xy}(\omega_x\omega_z - \dot{\omega}_y) = M_x;$$
$$I_y\dot{\omega}_y - \omega_z\omega_x(I_z - I_x) + I_{xy}(\omega_y\omega_z - \dot{\omega}_x) = M_y; \qquad (2.13в)$$
$$I_z\dot{\omega}_z - \omega_x\omega_y(I_x - I_y) + I_{xy}(\omega_y^2 - \omega_x^2) = M_z.$$

- ориентацию самолета – уравнения кинематических связей угловых скоростей (2.2):

$$\omega_x = \dot{\gamma} + \dot{\psi}\sin\vartheta;$$
$$\omega_y = \dot{\psi}\cos\vartheta\cos\gamma + \dot{\vartheta}\sin\gamma; \qquad (2.13г)$$
$$\omega_z = -\dot{\psi}\cos\vartheta\sin\gamma + \dot{\vartheta}\cos\gamma.$$

Первые шесть уравнений описывают поступательное движение самолета, вторые шесть уравнений — вращательное движение самолета. Это – система нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, причем число независимых переменных превышает число уравнений (т. е. система не замкнута).

Рассматривая движение самолета как материальной точки, часто пользуются понятием перегрузки, и уравнения сил выражают через перегрузку. *Перегрузкой* называется отношение результирующей силы $\overline{R}$ (равной геометрической сумме тяги $\overline{P}$ и аэродинамической силы планера $\overline{R}_A$) к силе тяжести

$$\bar{n} = \frac{\overline{R}}{G} = \frac{\overline{P} + \overline{R}_A}{G}. \tag{2.21}$$

Таким образом, в перегрузку входят все силы, действующие на самолет, кроме силы тяжести. Следовательно, вектор перегрузки характеризует величину и направление тех сил, с помощью которых осуществляется управление полетом. Равенство перегрузки нулю означает, что на самолет действует только неуравновешенная сила тяжести. Про такие тела говорят, что они находятся в состоянии невесомости или свободного падения.

Вектор перегрузки в динамике полета принято задавать его проекциями на оси связанной или скоростной систем координат. Проекции вектора перегрузки на оси связанной системы координат

$$n_x = \frac{R_x}{mg};\ n_y = \frac{R_y}{mg};\ n_z = \frac{R_z}{mg} \tag{2.22}$$

называются соответственно продольной, нормальной и поперечной перегрузками.

Проекции вектора перегрузки на оси скоростной системы координат (см. рис. 2.5) определяются как:

$$\begin{aligned} n_{x_a} &= \frac{P - X_a}{mg}; \\ n_{y_a} &= \frac{Y_a + P\alpha_p}{mg} \approx \frac{Y_a}{mg}; \\ n_{z_a} &= \frac{Z_a + P\beta}{mg} \approx \frac{Z_a}{mg}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Они называются соответственно тангенциальной, нормальной скоростной и боковой перегрузкой. Последние приближенные выражения для проекций перегрузок относятся к случаю, когда тяга мала по сравнению с силой тяжести, и можно пренебречь ее проекциями на оси OY_a и OZ_a.