

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ»

Кафедра аэродинамики, конструкции и прочности
летательных аппаратов
Ефимов В.В., Ефимова М.Г.

ДИНАМИКА И ПРОЧНОСТЬ
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

ПОСОБИЕ

по выполнению расчетно-графической работы
«Определение усилий и перемещений
в стержневых системах с использованием
матричного метода»

для студентов II курса
направления 162300
всех форм обучения

Москва – 2013

Рецензент: д.т.н., проф. Ципенко В.Г.

Ефимов В.В., Ефимова М.Г.

Динамика и прочность авиационных конструкций: Пособие по выполнению расчетно-графической работы «Определение усилий и перемещений в стержневых системах с использованием матричного метода». – М.: МГТУ ГА, 2013. – 24 с.

Данное пособие издается в соответствии с учебным планом для студентов 2-го курса направления 162300 всех форм обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 05.02.2013 (Протокол № 7) и методического совета 05.03.2013 (Протокол № 7).

Содержание

Введение.....	4
Рекомендуемая литература.....	4
1. Формулировка задания.....	5
2. Оформление работы.....	8
3. Методика определения усилий в стержнях и перемещений узлов ферменных авиационных конструкций.....	8
4. Вопросы для самопроверки.....	22
Приложение.....	23

Введение

Дисциплина «Динамика и прочность авиационных конструкций» посвящена изучению теоретических основ анализа прочности, жесткости, статической устойчивости и динамического поведения авиационных конструкций. В конструкции летательных аппаратов широко используются стержневые системы (фермы, рамы). Они находят применение в конструкции шасси, в системах крепления двигателей, в качестве элементов конструкции планера летательного аппарата.

Из теоретической части дисциплин «Динамика и прочность авиационных конструкций» и «Сопротивление материалов» известны традиционные методы составления уравнений для расчета прочности и жесткости статически определимых и статически неопределимых ферменных конструкций, такие как, например, метод вырезания узлов, метод моментных точек (осей) и др. Однако стержневые системы могут иметь большое число элементов, что приводит к значительным вычислительным трудностям при их расчете традиционными методами. В настоящее время решить эту проблему позволяет компьютерная техника. При этом алгоритмы расчетов обычно составляются с использованием алгебры матриц, поскольку в данном случае компьютерные программы получаются достаточно компактными.

Знание матричного метода расчета стержневых систем, кроме того, дает основу для понимания метода конечных элементов, который в настоящее время широко применяется для расчета конструкций различных типов. Матричный метод универсален и применяется как для расчета статически определимых, так и для расчета статически неопределимых стержневых систем.

Настоящее пособие содержит в себе задания и методические указания для выполнения расчетно-графической работы, которая призвана помочь закреплению теоретического материала и получению знаний прикладного характера по разделу «Расчет стержневых систем».

Перед началом работы студентам рекомендуется изучить или повторить соответствующие разделы дисциплины «Динамика и прочность авиационных конструкций», а также повторить основы алгебры матриц.

Рекомендуемая литература

1. Строительная механика летательных аппаратов: учебник для авиационных специальностей вузов / под ред. И.Ф. Образцова. – М.: Машиностроение, 1986. – 536 с.
2. Страхов Г.И., Чунарева Н.Н. Строительная механика самолета. – М.: МИИГА, 1983. – 96 с.

1. Формулировка задания

Для заданной схемы конструкции и схемы нагрузок:

- определить усилия в элементах фермы;
- определить перемещения узловых точек;
- определить реакции опор;
- выполнить проверку решения;
- построить эпюру усилий и схему перемещения узлов.

Вариант задания выбирается в соответствии с табл. 1. Порядок выбора определяется по табл. 2. На рис. 1 показаны схемы ферм к вариантам заданий.

Таблица 1

Варианты заданий

№ варианта	Схема	Нагрузки
1	1	R_{x1}, R_{y1}, R_{x5}
2		R_{x1}, R_{y1}, R_{y5}
3		R_{x1}, R_{x5}, R_{y5}
4		R_{y1}, R_{x5}, R_{y5}
5	2	R_{x1}, R_{y1}, R_{x5}
6		R_{x1}, R_{y1}, R_{y5}
7		R_{x1}, R_{x5}, R_{y5}
8		R_{y1}, R_{x5}, R_{y5}
9	3	R_{x1}, R_{y1}, R_{x5}
10		R_{x1}, R_{y1}, R_{y5}
11		R_{x1}, R_{x5}, R_{y5}
12		R_{y1}, R_{x5}, R_{y5}
13	4	R_{x1}, R_{y1}, R_{x5}
14		R_{x1}, R_{y1}, R_{y5}
15		R_{x1}, R_{x5}, R_{y5}
16		R_{y1}, R_{x5}, R_{y5}
17	5	R_{x1}, R_{y1}, R_{x5}
18		R_{x1}, R_{y1}, R_{y5}
19		R_{x1}, R_{x5}, R_{y5}
20		R_{y1}, R_{x5}, R_{y5}
21	6	R_{x1}, R_{y1}, R_{x5}
22		R_{x1}, R_{y1}, R_{y5}
23		R_{x1}, R_{x5}, R_{y5}
24		R_{y1}, R_{x5}, R_{y5}

Таблица 2

Выбор номера варианта

1	Предпоследняя цифра номера зачетной книжки	1, 4, 7, 0										2, 5, 8						
2	Последняя цифра номера зачетной книжки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
3	Номер варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Продолжение табл. 2

1	Предпоследняя цифра номера зачетной книжки	2, 5, 8						3, 6, 9						
2	Последняя цифра номера зачетной книжки	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
3	Номер варианта	18	19	20	21	22	23	24	1	6	11	16	19	24

Для расчета предлагается ферменная конструкция, которая может являться, например, моделью конструкции крепления двигателя к планеру летательного аппарата. Все силы, действующие на двигатель, приводятся к системе статически эквивалентных сил нагружения фермы, приложенных в узлах № 1 и № 5. Узлы № 2 и № 4 являются узлами крепления фермы к планеру летательного аппарата, один из которых фиксирует ферму в двух направлениях (по осям Ox и Oy), другой лишь в одном направлении – по оси Oy .

Жесткость элементов при расчете принять одинаковой.

Система нагрузок, действующих на ферму, определяется соотношениями:

$$R_{x1} = R_{x5} = P; R_{y1} = 0,2 P; R_{y5} = 0,4 P.$$

Все вычисления выполняются в параметрах P и a .

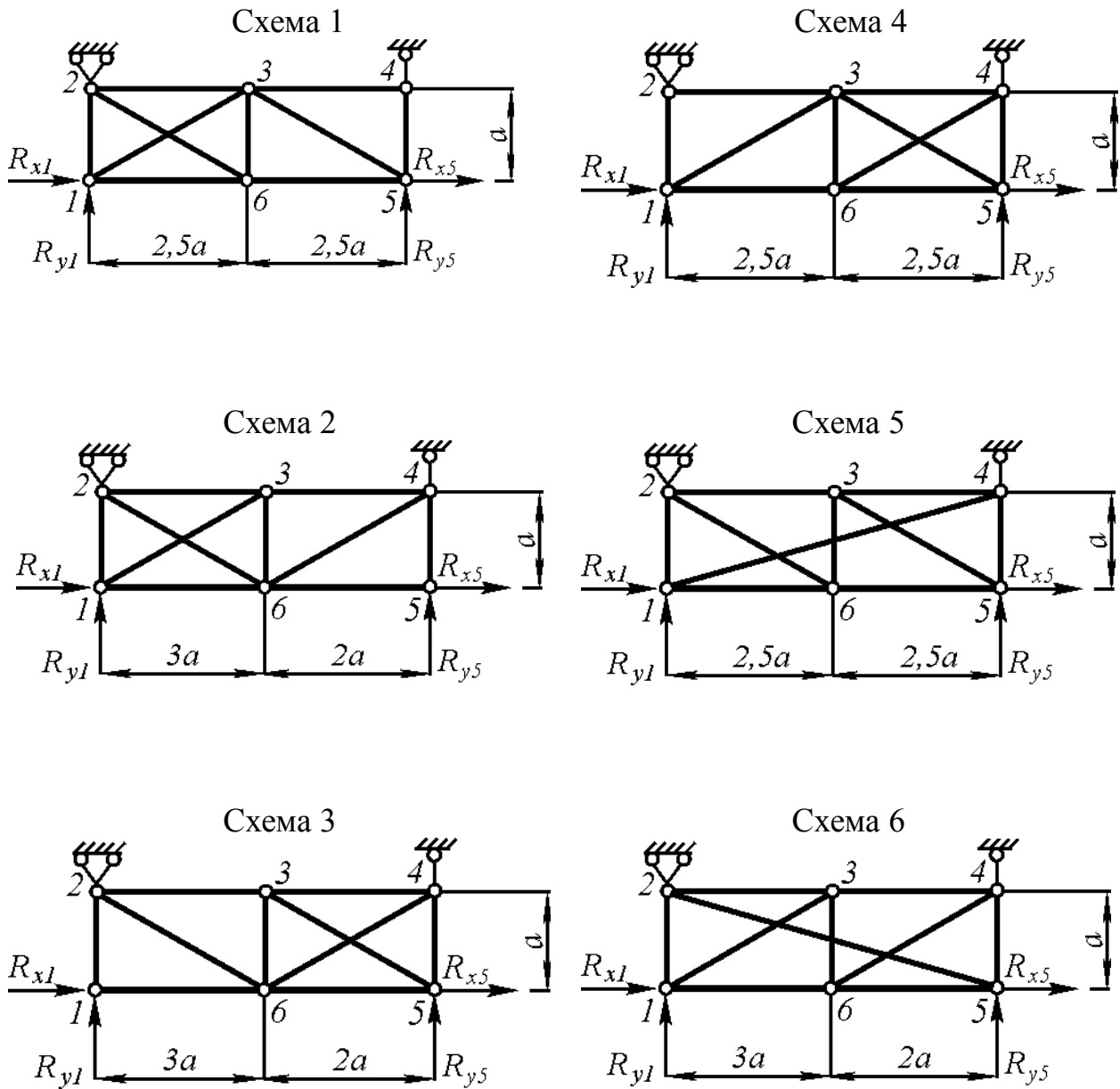


Рис. 1

Примечания к рис. 1:

- 1) в схеме 5 стержень 1-4 соединен с другими стержнями только в узлах 1 и 4;
- 2) в схеме 6 стержень 2-5 соединен с другими стержнями только в узлах 2 и 5.

2. Оформление работы

Работа представляется в виде пояснительной записки на листах белой бумаги формата А4, содержащей необходимые расчеты, схемы и эпюры. Текст пояснительной записки, таблицы, эпюры и рисунки выполняются студентом только ОТ РУКИ. Эпюры должны быть вычерчены на миллиметровой бумаге.

Изложение пояснительной записки должно быть четким и лаконичным, терминология и обозначения, входящие в расчетные формулы, должны быть общепринятыми для данной дисциплины. Обозначения, входящие в формулы, необходимо пояснять. Все вычисления должны записываться в следующей форме: формула в буквах = формула в цифрах = результат вычислений и размерность.

Автор несёт полную ответственность за содержание работы и обязан при ее защите отвечать на вопросы по тексту и теоретической части.

3. Методика определения усилий в стержнях и перемещений узлов ферменных авиационных конструкций

В данном разделе будут использоваться готовые формулы. С выводом данных формул и их теоретическим обоснованием необходимо ознакомиться по [1, 2] перед началом выполнения задания. Это облегчит понимание материала.

Рассмотрим ферменную конструкцию, представленную на рис. 2 и на ее примере рассмотрим основные положения матричного метода расчета ферм.

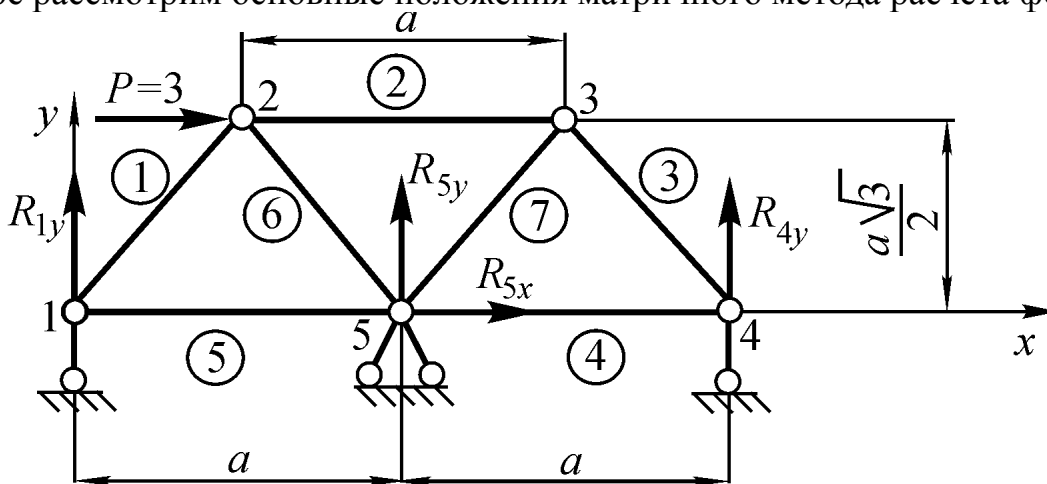


Рис. 2

Следует отметить, что рассматриваемая методика расчета применима для статически определимых и статически неопределимых ферм при условии, что нагрузка приложена в узловых точках, а жесткость и площади поперечного сечения каждого стержня не меняются по его длине.

В этом случае усилия в стержне постоянны, а векторы усилий и перемещений в случае плоской фермы содержат по два компонента.

Произведем кинематический анализ данной фермы. Найдем степень статической неопределимости:

$$W = 2U - C = 2 \cdot 5 - 11 = -1,$$

где U – число узлов (исключая опорные узлы);

C – число всех стержней (включая опорные стержни).

Поскольку $W = -1 < 0$, рассматриваемая стержневая система статически неопределима.

Представим данную стержневую систему как совокупность упорядоченно расположенных элементов. Стержни и узлы, соединяющие их, пронумеруем. При этом введем две независимые произвольные системы нумерации (рис. 2):

- для стержней (номера стержней обведены в кружочек);
- для узлов.

Для простоты в рассматриваемой задаче примем, что жесткость всех элементов одинакова, а $P = 3$. Решение задачи будем вести в произвольной системе координат, начало координат – узел № 1.

Для аналитического описания фермы составим структурную матрицу \bar{S}_c таким образом, чтобы число столбцов совпадало с числом стержней, а число строк – с числом узлов. Номер столбца должен соответственно совпадать с номером стержня, а номер строки – с номером узла. При этом значащие члены матрицы должны быть равны $+1$, если это начальный узел стержня (узел с меньшим номером) и -1 , если это конечный узел стержня (узел с бóльшим номером). Заполнение матрицы ведут по столбцам, занося последовательно для каждого стержня условные $+1$ и -1 в соответствующие строки. Для рассматриваемой фермы получим:

$$\bar{S}_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Например, столбец № 5 показывает, что элемент № 5 начинается в узле № 1 и заканчивается в узле № 5. Строка № 3 показывает, что элементы № 3 и № 7 начинаются в этом узле, а элемент № 2 – заканчивается.

Составим матрицу координат узлов, включающую векторы-столбцы координат каждого узла:

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} \vec{C}_1 \\ \vec{C}_2 \\ \vec{C}_3 \\ \vec{C}_4 \\ \vec{C}_5 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\vec{C}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, i = 1, 2, \dots, 5;$ (3)

x_i, y_i – координаты i -го узла.

В развернутом виде:

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ x_3 \\ y_3 \\ x_4 \\ y_4 \\ x_5 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5a \\ \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ 1,5a \\ \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ 2 \\ 2a \\ 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Составим матрицу-вектор внешних нагрузок (сил в узлах фермы):

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} \vec{P}_1 \\ \vec{P}_2 \\ \vec{P}_3 \\ \vec{P}_4 \\ \vec{P}_5 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $\vec{P}_i = \begin{pmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \end{pmatrix}, i = 1, 2, \dots, 5;$ (6)

P_{ix}, P_{iy} – проекции внешней нагрузки в i -м узле на соответствующие оси системы координат.

Положительное направление нагрузок совпадает с направлением осей Ox и Oy . В число нагрузок должны быть включены также реакции опор R_{ix}, R_{iy}

(рис. 2). Для сокращения места запишем матрицу-вектор \vec{P} в транспонированном виде:

$$\vec{P}^T = \| \| 0 \ R_{1,y} \ 3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ R_{4,y} \ R_{5,x} \ R_{5,y} \| \| . \quad (7)$$

Составим матрицу-вектор неизвестных усилий в стержнях, которую также запишем в транспонированном виде:

$$\vec{N}^T = \| \| \vec{N}_1 \ \vec{N}_2 \ \vec{N}_3 \ \vec{N}_4 \ \vec{N}_5 \ \vec{N}_6 \ \vec{N}_7 \| \| , \quad (8)$$

где $\vec{N}_j = \| \| \begin{matrix} N_{jx} \\ N_{jy} \end{matrix} \| \| , j = 1, 2, \dots, 7; \quad (9)$

N_{jx}, N_{jy} – проекции неизвестных усилий в j -м стержне на соответствующие оси системы координат.

Запишем уравнение равновесия сил в матричной форме:

$$(\bar{S}_c \ \bar{\alpha}) \vec{N} + \vec{P} = 0, \quad (10)$$

где $\bar{\alpha}$ – диагональная матрица направляющих косинусов.

Ось каждого стержня фермы определенным образом ориентирована по отношению к осям выбранной системы координат. Эту ориентацию можно задать с помощью косинусов углов между осью стержня и осью системы координат. В результате получится следующая диагональная матрица:

$$\bar{\alpha} = \| \| \begin{matrix} \bar{\alpha}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\alpha}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\alpha}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\alpha}_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\alpha}_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\alpha}_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{\alpha}_7 \end{matrix} \| \| , \quad (11)$$

где $\bar{\alpha}_j = \| \| \begin{matrix} \cos \alpha_{jx} \\ \cos \alpha_{jy} \end{matrix} \| \| , j = 1, 2, \dots, 7. \quad (12)$

α_{jx}, α_{jy} – углы между осью j -го стержня и соответствующей осью системы координат.

Уравнение (10) содержит неизвестные в матрице-векторе \vec{N} и в матрице-векторе \vec{P} (опорные реакции). С целью исключения неизвестных опорных реакций из уравнений равновесия используется так называемая «выметающая» матрица \bar{S}_0 . Это такая матрица, построенная на основе единичной матрицы, из которой удалены строки с номерами как у опорных реакций в матрице-векторе (7). В рассматриваемом примере это будут строки с номерами 2, 8, 9 и 10.

$$\bar{S}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

Умножим уравнение (10) на матрицу \bar{S}_0 :

$$\bar{S}_0(\bar{S}_c \bar{\alpha}) \vec{N} + \vec{Q} = 0, \quad (14)$$

где $\vec{Q} = \bar{S}_0 \vec{P}$. (15)

В данном примере:

$$\vec{Q}^T = \|0 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\|. \quad (16)$$

Однако и теперь в рассматриваемом примере число неизвестных (7 неизвестных усилий в стержнях) превышает число уравнений (6 уравнений равновесия, вытекающих из (14)). В связи с этим для раскрытия статической неопределенности необходимо использовать условие совместности деформаций: стержневая система, соединенная в узлах, должна оставаться соединенной в этих же узлах и после деформации. Это значит, что перемещения концов всех стержней, примыкающих к рассматриваемому узлу, а следовательно, и их проекции на оси системы координат должны быть одинаковыми.

Рассмотрим k -й стержень до и после деформации фермы (рис. 3).

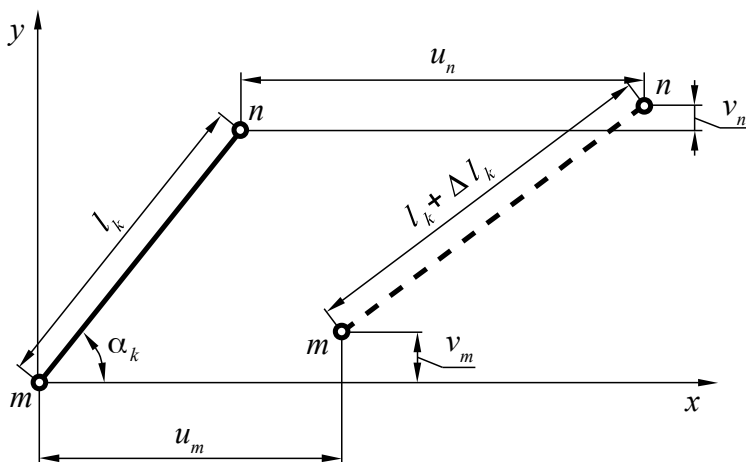


Рис. 3. К рассмотрению деформации стержня

Если принять допущение о малости перемещений, то это позволит использовать тригонометрические соотношения. Тогда в общем случае при наличии перемещений вдоль обеих осей:

$$\Delta l_k = \Delta u_{nm} \cos \alpha_k + \Delta v_{nm} \sin \alpha_k, \quad (17)$$

где $\Delta u_{nm} = u_n - u_m$; $\Delta v_{nm} = v_n - v_m$.

Но из теоремы Кастильяно вытекает:

$$\Delta l_k = \frac{N_k l_k}{E_k F_k}, \quad (18)$$

где E_k – модуль упругости k -го стержня;

F_k – площадь поперечного сечения k -го стержня.

В матричной форме уравнения (17) и (18) для всех стержней фермы можно записать соответственно:

$$\vec{\Delta} = -\vec{\alpha}^T \vec{S}_c^T \vec{r}, \quad (19)$$

$$\vec{\Delta} = \vec{G} \vec{N}, \quad (20)$$

где $\vec{r} = \begin{pmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \\ \vec{r}_3 \\ \vec{r}_4 \\ \vec{r}_5 \end{pmatrix}$ – матрица-вектор перемещений, $\vec{r}_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$;

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} \frac{l_1}{E_1 F_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{l_2}{E_2 F_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l_7}{E_7 F_7} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Учитывая условия рассматриваемой задачи, можно записать:

$$\vec{G} = \frac{a}{EF} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Из (19) и (20) вытекает условие совместности деформаций:

$$\bar{G} \vec{N} = -\bar{\alpha}^T \bar{S}_c^T \vec{r}. \quad (23)$$

Отсюда можно выразить матрицу-вектор неизвестных усилий в стержнях:

$$\vec{N} = -\bar{G}^{-1} \bar{\alpha}^T \bar{S}_c^T \vec{r}. \quad (24)$$

Подставим (24) в уравнение равновесия (14) и получим основное разрешающее уравнение задачи:

$$\bar{S}_0 \bar{S}_c \bar{\alpha} \bar{G}^{-1} \bar{\alpha}^T \bar{S}_c^T \vec{r} = \vec{Q}. \quad (25)$$

Матрицу-вектор \vec{r} можно представить в следующем виде:

$$\vec{r} = \bar{S}_0^T \vec{\delta}, \quad (26)$$

где $\vec{\delta}$ – матрица-вектор перемещений, из которой исключены заранее известные нулевые перемещения в опорных узлах фермы.

Тогда:

$$\bar{K} \vec{\delta} = \vec{Q}, \quad (27)$$

где $\bar{K} = \bar{S}_0 \bar{S}_c \bar{\alpha} \bar{G}^{-1} \bar{\alpha}^T \bar{S}_c^T \bar{S}_0^T$ – матрица жесткости.

Составив матрицу жесткости, обратим ее и получим матрицу гибкости (или податливости):

$$\bar{L} = \bar{K}^{-1} = (\bar{S}_0 \bar{S}_c \bar{\alpha} \bar{G}^{-1} \bar{\alpha}^T \bar{S}_c^T \bar{S}_0^T)^{-1}. \quad (28)$$

Теперь можно найти неизвестные перемещения узлов фермы, без перемещений опорных узлов, которые известны и равны нулю:

$$\vec{\delta} = \bar{L} \vec{Q}. \quad (29)$$

Подставив полученную матрицу-вектор перемещений в уравнение (26), а затем полученную матрицу-вектор \vec{r} – в уравнение (24), найдем усилия в стержнях:

$$\vec{N} = -\bar{G}^{-1} \bar{\alpha}^T \bar{S}_c^T \bar{S}_0^T \vec{\delta}. \quad (30)$$

Итак построены все вспомогательные матрицы, описывающие задачу. Это:

- 1) структурная матрица \bar{S}_c по (1);
- 2) матрица координат узлов \bar{C} по (4);
- 3) «выметающая» матрица \bar{S}_0 по (13);
- 4) матрица внешних нагрузок \vec{Q} по (16);
- 5) матрица податливости стержней \bar{G} по (22).

Для примера выполним эти вычисления для рассматриваемой задачи.

Составим матрицу направляющих косинусов $\bar{\alpha}$.

Используя аналитическую геометрию, выражение (12) можно записать:

$$\vec{\alpha}_j = \frac{1}{l_j} \begin{pmatrix} l_{jx} \\ l_{jy} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

где l_j – длина j -го стержня;

$l_{jx} = x_{kj} - x_{nj}$, $l_{jy} = y_{kj} - y_{nj}$ – длины проекций j -го стержня на соответствующие оси системы координат;

x_{nj} , x_{kj} – координаты соответственно начала и конца j -го стержня по оси Ox ;

y_{nj} , y_{kj} – координаты соответственно начала и конца j -го стержня по оси Oy .

Введем вектор проекций:

$$\vec{\pi}_j = \begin{pmatrix} l_{jx} \\ l_{jy} \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Матрица-вектор проекций всех стержней будет иметь вид:

$$\vec{\pi} = \begin{pmatrix} \vec{\pi}_1 \\ \vec{\pi}_2 \\ \vdots \\ \vec{\pi}_7 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Эту матрицу можно легко получить, используя ранее составленную структурную матрицу (1) и матрицу координат узлов (4):

$$\vec{\pi} = -\bar{S}_c^T \vec{C} = - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0,5a \\ a\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1,5a \\ a\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5a \\ a\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0,5a \\ -a\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0,5a \\ -a\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -0,5a \\ -a\sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\pi}_1 \\ \vec{\pi}_2 \\ \vec{\pi}_3 \\ \vec{\pi}_4 \\ \vec{\pi}_5 \\ \vec{\pi}_6 \\ \vec{\pi}_7 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Длины стержней можно определить следующим образом:

$$l_j = \sqrt{l_{jx}^2 + l_{jy}^2} = \sqrt{\vec{\pi}_j^T \vec{\pi}_j}. \quad (35)$$

$$l_1 = \sqrt{\left\| \begin{matrix} 0,5a & \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 0,5a \\ \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{matrix} \right\|} = a.$$

$$l_2 = \sqrt{\left\| \begin{matrix} a & 0 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} a \\ 0 \end{matrix} \right\|} = a.$$

$$l_3 = \sqrt{\left\| \begin{matrix} 0,5a & -\frac{a\sqrt{3}}{2} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 0,5a \\ -\frac{a\sqrt{3}}{2} \end{matrix} \right\|} = a.$$

Аналогично получим: $l_4 = l_5 = l_6 = l_7 = a$.

Направляющие косинусы определим по формуле (31):

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{1}{a} \left\| \begin{matrix} 0,5a \\ \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0,5 \\ 0,87 \end{matrix} \right\| \text{ и т.д.}$$

В результате получим матрицу направляющих косинусов:

$$\bar{\alpha} = \left\| \begin{matrix} \left\| \begin{matrix} 0,5 \\ 0,87 \end{matrix} \right\| & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\| & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left\| \begin{matrix} 0,5 \\ -0,87 \end{matrix} \right\| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left\| \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} \right\| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left\| \begin{matrix} 0,5 \\ -0,87 \end{matrix} \right\| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left\| \begin{matrix} -0,5 \\ -0,87 \end{matrix} \right\| \end{matrix} \right\|. \quad (36)$$

Представляя выметающую матрицу \bar{S}_0 как блочную, элементами которой являются матрицы размера 1×2 , перемножаем первую группу матриц в уравнении (25):

$$\begin{aligned} \bar{K}_0 &= \bar{S}_0 \bar{S}_c \bar{\alpha} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{0} - \frac{0}{0} + \frac{0}{0} - \frac{0}{0} + \frac{0}{0} - \frac{0}{0} + \frac{0}{0} - \frac{0}{0} + \frac{0}{0} - \frac{0}{0} \\ \frac{0}{0} - \frac{0}{0} + \frac{1}{0} - \frac{0}{0} + \frac{0}{0} - \frac{0}{0} + \frac{0}{0} - \frac{0}{0} + \frac{0}{0} - \frac{0}{0} \\ \frac{0}{0} - \frac{0}{0} + \frac{0}{0} - \frac{1}{0} + \frac{0}{0} - \frac{0}{0} + \frac{0}{0} - \frac{0}{0} + \frac{0}{0} - \frac{0}{0} \\ \frac{0}{0} - \frac{0}{0} + \frac{0}{0} - \frac{0}{0} + \frac{1}{0} - \frac{0}{0} + \frac{0}{0} - \frac{0}{0} + \frac{0}{0} - \frac{0}{0} \\ \frac{0}{0} - \frac{0}{0} + \frac{0}{0} - \frac{0}{0} + \frac{0}{0} - \frac{1}{0} + \frac{0}{0} - \frac{0}{0} + \frac{0}{0} - \frac{0}{0} \\ \frac{0}{0} - \frac{0}{0} + \frac{0}{0} - \frac{0}{0} + \frac{0}{0} - \frac{0}{0} + \frac{1}{0} - \frac{0}{0} - \frac{0}{0} - \frac{0}{0} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,87 \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,87 \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,87 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,87 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ -0,87 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,87 & 0 \\ 0 & -1 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & -0,87 & 0 & 0 & 0 & -0,87 \\ 0 & 0 & -0,5 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (37)$$

Составим матрицу жесткости:

$$\bar{K} = \bar{S}_0 \bar{S}_c \bar{\alpha} \bar{G}^{-1} (\bar{S}_0 \bar{S}_c \bar{\alpha})^T = \bar{K}_0 \bar{G}^{-1} \bar{K}_0^T =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{EF}{a} \begin{vmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ -0,87 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,87 & 0 \\ 0 & -1 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & -0,87 & 0 & 0 & 0 & -0,87 \\ 0 & 0 & -0,5 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \\
&\times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0,5 & -0,5 & -0,87 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & -0,87 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & -0,87 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5 & -0,87 & 0 \end{vmatrix} = \\
&= \frac{EF}{a} \begin{vmatrix} 1,25 & -0,25 & -0,43 & 0 & 0 & 0 \\ -0,25 & 1,5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -0,43 & 0 & 1,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1,5 & 0 & -0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,5 & 0,43 \\ 0 & 0 & 0 & -0,25 & 0,43 & 1,25 \end{vmatrix}. \tag{38}
\end{aligned}$$

Обратив последнюю матрицу, получим матрицу податливости:

$$\bar{L} = \frac{a}{EF} \begin{vmatrix} 0,95 & 0,30 & 0,28 & 0,20 & -0,01 & 0,05 \\ 0,30 & 1,33 & 0,09 & 0,92 & -0,06 & 0,20 \\ 0,28 & 0,09 & 0,75 & 0,06 & 0,00 & 0,01 \\ 0,20 & 0,92 & 0,06 & 1,33 & -0,09 & 0,30 \\ -0,01 & -0,06 & 0,00 & -0,09 & 0,75 & -0,28 \\ 0,05 & 0,20 & 0,01 & 0,30 & -0,28 & 0,95 \end{vmatrix}. \tag{39}$$

Матрица-вектор перемещений узлов (без нулевых перемещений опор):

$$\vec{\delta} = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \end{vmatrix} = \bar{L} \vec{Q} = \frac{a}{EF} \begin{vmatrix} 0,95 & 0,30 & 0,28 & 0,20 & -0,01 & 0,05 \\ 0,30 & 1,33 & 0,09 & 0,92 & -0,06 & 0,20 \\ 0,28 & 0,09 & 0,75 & 0,06 & 0,00 & 0,01 \\ 0,20 & 0,92 & 0,06 & 1,33 & -0,09 & 0,30 \\ -0,01 & -0,06 & 0,00 & -0,09 & 0,75 & -0,28 \\ 0,05 & 0,20 & 0,01 & 0,30 & -0,28 & 0,95 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} =$$

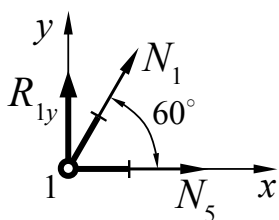
$$= \frac{a}{EF} \begin{pmatrix} 0,89 \\ 3,99 \\ 0,26 \\ 2,76 \\ -0,18 \\ 0,61 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Теперь по известному вектору перемещений находим усилия (формулы (24) и (26)):

$$\begin{aligned} \vec{N} &= -\bar{G}^{-1}(\bar{S}_0 \bar{S}_c \bar{\alpha})^T \vec{\delta} = -\bar{G}^{-1} \bar{K}_0^T \vec{\delta} = \\ &= - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 & -0,87 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & -0,87 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & -0,87 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5 & -0,87 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,89 \\ 3,99 \\ 0,26 \\ 2,76 \\ -0,18 \\ 0,61 \end{pmatrix}; \\ \vec{N} &= \begin{pmatrix} \vec{N}_1 \\ \vec{N}_2 \\ \vec{N}_3 \\ \vec{N}_4 \\ \vec{N}_5 \\ \vec{N}_6 \\ \vec{N}_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,77 \\ -1,23 \\ -1,23 \\ 0,61 \\ -0,89 \\ -1,77 \\ 1,23 \end{pmatrix}. \quad (41) \end{aligned}$$

Для определения реакций опор можно воспользоваться оставшимися, «выметенными» с помощью матрицы \bar{S}_0 , уравнениями. Однако в рассматриваемом примере нет смысла составлять новую систему матричных уравнений. При небольшом числе опорных реакций лучше воспользоваться методом вырезания узлов. Следует отметить, что при этом нарушается универсальность алгоритма.

Рассмотрим равновесие узла № 1 (рис. 4).



$$\sum X = N_1 \cos 60^\circ + N_5 = 0;$$

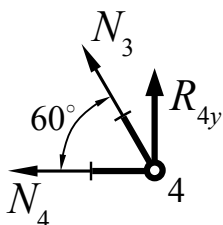
$$\sum Y = R_{1y} + N_1 \sin 60^\circ = 0.$$

Рис. 4

Реакцию опоры R_{1y} находим из второго уравнения с учетом (41):

$$R_{1y} = -N_1 \sin 60^\circ \approx -1,77 \cdot 0,87 = -1,54.$$

Рассмотрим равновесие узла № 4 (рис. 5).



$$\sum X = -N_3 \cos 60^\circ - N_4 = 0;$$

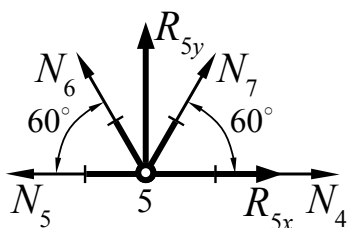
$$\sum Y = R_{4y} + N_3 \sin 60^\circ = 0.$$

Рис. 5

Реакцию опоры R_{4y} находим также из второго уравнения с учетом (41):

$$R_{4y} = -N_3 \sin 60^\circ = 1,23 \cdot \sin 60^\circ = 1,06.$$

Рассмотрим равновесие узла № 5 (рис. 6).



$$\sum X = -N_5 + N_4 + R_{5x} - N_6 \cos 60^\circ + N_7 \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum Y = N_6 \sin 60^\circ + R_{5y} + N_7 \sin 60^\circ = 0.$$

Рис. 6

Из первого уравнения находим реакцию опоры R_{5x} :

$$R_{5x} = N_5 - N_4 + N_6 \cos 60^\circ - N_7 \cos 60^\circ = -0,89 - 0,61 - 1,77 \cdot \cos 60^\circ - 1,23 \cdot \cos 60^\circ = -3,00.$$

Из второго уравнения находим реакцию опоры R_{5y} :

$$R_{5y} = -N_6 \sin 60^\circ - N_7 \sin 60^\circ = 1,77 \cdot \sin 60^\circ - 1,23 \cdot \sin 60^\circ = 0,47.$$

Для проверки правильности определения опорных реакций используем общие уравнения равновесия системы. Сумма проекций всех внешних сил, приложенных к системе, на ось Ox должна быть равна нулю:

$$\sum X = P + R_{5x} = 3,0 - 3,0 = 0.$$

Сумма проекций всех внешних сил, приложенных к системе, на ось Oy также должна быть равна нулю:

$$\sum Y = R_{1y} + R_{4y} + R_{5y} = -1,54 + 1,06 + 0,47 = -0,01.$$

Рассчитаем относительную погрешность по отношению к максимальному из усилий (в данном примере это усилие $N_1 = 1,77$).

Относительная погрешность:

$$\frac{|-0,01|}{1,77} \cdot 100\% \approx 0,57\%.$$

В обоих случаях точность очень хорошая.

Таким образом, мы определили усилия в стержнях, опорные реакции и перемещения узлов. Задача полностью решена.

Построим эпюры усилий в стержнях (рис. 7) и покажем перемещения узлов (рис. 8), соблюдая по возможности масштаб.

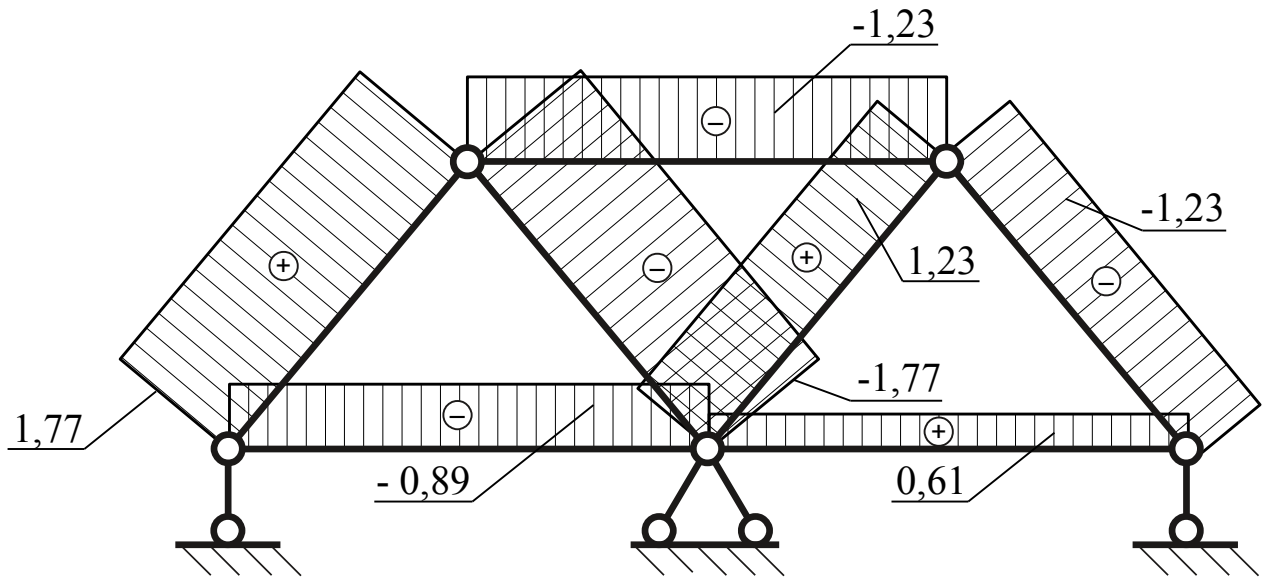


Рис. 7

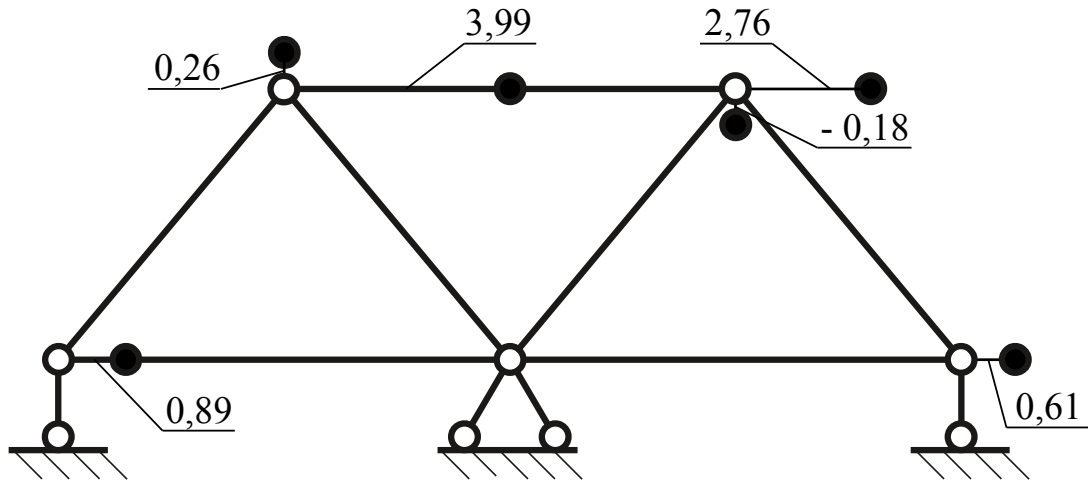


Рис. 8

4. Вопросы для самопроверки

1. Какие фермы называются статически определимыми, а какие – статически неопределимыми?
2. Как узнать степень статической неопределимости фермы?
3. Что такое структурная матрица? Как она составляется?
4. Какие матрицы необходимо составить для решения задачи определения усилий и перемещений в стержневых системах с использованием матричного метода?
5. Для чего вводится «выметающая» матрица?
6. Какой физический смысл имеет основное разрешающее уравнение задачи?
7. Какова связь между матрицей жесткости и матрицей податливости?
8. Должны ли матрицы жесткости и податливости обязательно быть квадратными?
9. Какими методами можно определить опорные реакции фермы?
10. В чем преимущество матричного метода решения по сравнению с другими известными Вам методами расчета ферм?
11. Позволяет ли матричный метод рассчитывать статически неопределимые фермы?
12. Приведите примеры использования стержневых систем в конструкции летательных аппаратов.

Некоторые сведения из алгебры матриц

Матрица – упорядоченная система чисел, расположенных по m строкам и n столбцам:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если $m=n$, то матрица называется квадратной.

Если $m=1$, то матрица называется матрица-строка. При $n=1$ матрица называется матрица-столбец.

Диагональная матрица – это матрица, у которой только диагональные элементы отличны от нуля. Если эти элементы равны единице, то такая матрица называется единичной и обозначается \bar{E} .

Операции с матрицами

1. Равенство матриц:

$$\bar{A} = \bar{B}, \text{ если } a_{ij} = b_{ij}.$$

2. Сумма матриц:

$$\bar{C} = \bar{A} + \bar{B}, \text{ если } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

3. Разность матриц:

$$\bar{C} = \bar{A} - \bar{B}, \text{ если } c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}.$$

4. Умножение матриц:

$$\bar{C} = \bar{A} \cdot \bar{B}.$$

При этом:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj},$$

т.е. элемент c_{ij} получается как сумма произведений элементов i -й строки левой матрицы \bar{A} на соответствующие элементы j -го столбца правой матрицы \bar{B} .

Умножение матриц возможно, если число столбцов матрицы \bar{A} равно числу строк матрицы \bar{B} .

Если размер матрицы $\bar{A} - m \times n$, а матрицы $\bar{B} - l \times k$, то размер матрицы-произведения $\bar{C} - m \times k$, т.е. эта матрица имеет число строк как у матрицы \bar{A} , а число столбцов как у матрицы \bar{B} .

Известно:

$$\bar{A} \cdot \bar{B} \neq \bar{B} \cdot \bar{A};$$

$$\bar{C} = \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{D} = (\bar{A} \cdot \bar{B}) \cdot \bar{D} = \bar{A} \cdot (\bar{B} \cdot \bar{D}).$$

5. Транспонирование матрицы – это замена строк на столбцы и наоборот. Транспонированная матрица обозначается верхним индексом «т»: \bar{A}^T . Элементы: $a_{ij}^T = a_{ji}$.

Известно:

$$(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D})^T = \bar{D}^T \cdot \bar{C}^T \cdot \bar{B}^T \cdot \bar{A}^T.$$

6. Обращение матриц.

Матрица \bar{A}^{-1} называется обратной по отношению к матрице \bar{A} , если:

$$\bar{A} \cdot \bar{A}^{-1} = \bar{A}^{-1} \cdot \bar{A} = \bar{E}.$$

Обращение матрицы можно произвести различными способами, например, с помощью матрицы алгебраических дополнений:

$$\bar{A}^{-1} = \frac{1}{\det \bar{A}} \cdot \bar{F}^T,$$

где $\det \bar{A}$ – определитель матрицы \bar{A} ;

\bar{F}^T – транспонированная матрица алгебраических дополнений элементов матрицы \bar{A} .

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы \bar{A} называется число

$$f_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

где M_{ij} – дополнительный минор, определитель матрицы, получающейся из исходной матрицы \bar{A} путем вычеркивания i -й строки и j -го столбца.

Матрицы \bar{A} и \bar{A}^{-1} обязательно должны быть квадратными.

Известно:

$$(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D})^{-1} = \bar{D}^{-1} \cdot \bar{C}^{-1} \cdot \bar{B}^{-1} \cdot \bar{A}^{-1}.$$