

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ВОЗДУШНОГО ТРАНСПОРТА**  
**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ**  
**УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**  
**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ**  
**ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**ГРАЖДАНСКОЙ АВИАЦИИ»**

---

**Кафедра аэродинамики, конструкции и прочности**  
**летательных аппаратов**  
Ефимов В.В.

# **ДИНАМИКА И ПРОЧНОСТЬ** **АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

## **Часть II**

*для студентов II курса*  
*направлений 162300 и 25.03.01*  
*всех форм обучения*

**Москва – 2014**

Рецензенты: д.т.н., проф. Ципенко В.Г., д.т.н., проф. Калугин В.Т.

Ефимов В.В.

Динамика и прочность авиационных конструкций: учебное пособие.  
Часть II. – М.: МГТУ ГА, 2014. – 72 с.

Данное пособие издается в соответствии с учебным планом для студентов  
2-го курса направлений 162300 и 25.03.01 всех форм обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседаниях кафедры 14.01.2014 и методиче-  
ского совета 14.02.2014.

## Содержание

Введение.....	4
1. Расчет оболочек.....	5
1.1. Безмоментная теория оболочек.....	5
1.1.1. Основные определения.....	5
1.1.2. Основные соотношения безмоментной теории оболочек вращения.....	8
1.1.3. Осесимметричное нагружение оболочки вращения.....	9
1.2. Балочная теория оболочек.....	11
1.2.1. Основные определения и допущения.....	11
1.2.2. Определение нормальных напряжений.....	14
1.2.3. Определение касательных напряжений.....	15
2. Статическая устойчивость элементов летательных аппаратов.....	24
2.1. Основные подходы к исследованию устойчивости упругих систем.....	25
2.2. Устойчивость стержней.....	28
2.3. Устойчивость прямоугольных пластин.....	34
2.3.1. Основные положения.....	34
2.3.2. Устойчивость прямоугольной пластины, сжатой вдоль одной оси.....	37
2.3.3. Устойчивость прямоугольной пластины при сдвиге.....	39
2.3.4. Устойчивость прямоугольной пластины при комбинированном нагружении.....	44
3. Динамика конструкций летательных аппаратов.....	48
3.1. Общие уравнения динамики упругих систем.....	48
3.1.1. Расчетные схемы конструкций летательных аппаратов.....	48
3.1.2. Принцип Д'Аламбера–Лагранжа.....	50
3.1.3. Уравнения Лагранжа второго рода.....	51
3.1.4. Уравнения колебаний упругой системы с конечным числом степеней свободы.....	52
3.1.5. Уравнения колебаний упругой системы с бесконечным числом степеней свободы.....	56
3.2. Методы и примеры исследования динамики упругих систем.....	57
3.2.1. Система с одной степенью свободы.....	57
3.2.2. Система с конечным числом степеней свободы.....	60
3.2.3. Системы с бесконечным числом степеней свободы.....	61
3.2.4. Формула Рэлея.....	65
3.2.5. Метод матричной итерации.....	67
Вопросы для самопроверки.....	70
Литература.....	72

## **Введение**

В части I учебного пособия по дисциплине «Динамика и прочность авиационных конструкций» были изложены основные сведения из теории упругости, а также методы расчета стержневых систем и пластин.

Настоящая, II-я часть учебного пособия, посвящена изучению теоретических основ расчета оболочек, подкрепленных тонкостенных конструкций, а также методов исследования устойчивости и динамики упругих систем.

Данные темы предусмотрены рабочей программой дисциплины «Динамика и прочность авиационных конструкций», входящей в учебный план подготовки студентов по направлениям 162300 и 25.03.01 – Техническая эксплуатация летательных аппаратов и двигателей.

## 1. Расчет оболочек

Оболочка – это тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми  $h$  (толщина оболочки) существенно меньше других характерных размеров данного тела.

Оболочка как модель широко используется в расчетных схемах элементов летательных аппаратов, таких как, например, крылья, фюзеляжи, корпуса и гондолы двигателей, обтекатели, коки, баллоны с сжатым газом и т.п.

### 1.1. Безмоментная теория оболочек

Если можно принять, что напряжения по толщине оболочки  $h$  распределены равномерно, то говорят, что она находится в безмоментном напряженном состоянии, т.к. равномерное распределение напряжений по толщине оболочки реализуется при отсутствии изгибающих моментов. Безмоментное напряженное состояние возникает также у оболочек, которые не имеют цилиндрической (изгибной) жесткости ( $D = Eh^3/[12(1-\mu^2)] = 0$ , где  $E$  – модуль упругости первого рода;  $\mu$  – коэффициент Пуассона), например, у оболочек аэростатов.

#### 1.1.1. Основные определения

По аналогии с пластинами, рассмотренными в части I настоящего учебного пособия, поверхность, разделяющую толщину оболочки пополам, назовем *срединной поверхностью*.

Свяжем с оболочкой систему координат  $\alpha, \beta, \gamma$  (рис. 1.1).

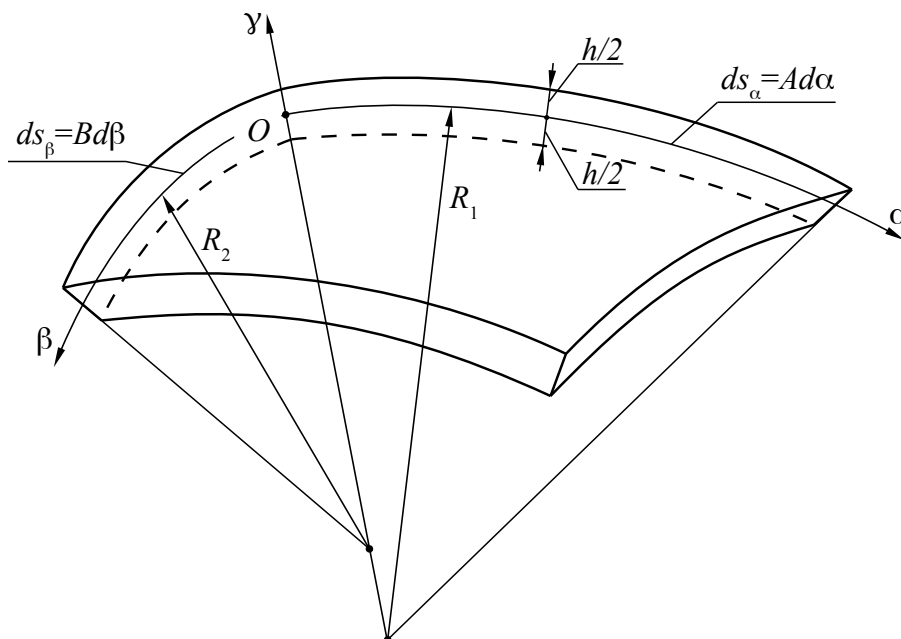


Рис. 1.1. Система координат оболочки

В данной системе координат ось  $y$  является прямолинейной и направлена по нормали к срединной поверхности, а оси  $\alpha$  и  $\beta$  являются криволинейными и лежат в срединной поверхности. Мысленно проведем через ось  $y$  семейство плоскостей. В результате пересечения этих плоскостей со срединной поверхностью образуется семейство кривых, проходящих через точку  $O$ . Среди этих кривых существуют две такие, у которых радиусы кривизны являются соответственно максимальным и минимальным в данной точке. Касательные к этим кривым называются главными направлениями срединной поверхности и являются ортогональными (примем это без доказательства).

Кривые, касающиеся в каждой точке главных направлений, называются линиями главных кривизн и используются в качестве координатных линий  $\alpha$  и  $\beta$ . Радиусы кривизны этих кривых в точке  $O$  называются первым и вторым главными радиусами кривизны срединной поверхности и обозначаются соответственно  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 1.1).

Длины элементарных участков координатных линий  $\alpha$  и  $\beta$  запишем в виде (рис. 1.1)

$$ds_\alpha = A d\alpha, ds_\beta = B d\beta, \quad (1.1)$$

где  $A$  и  $B$  – масштабные коэффициенты.

Рассмотрим оболочку вращения. Срединная поверхность оболочки вращения получается в результате мысленного вращения плоской кривой относительно оси, лежащей в плоскости этой кривой (рис. 1.2).

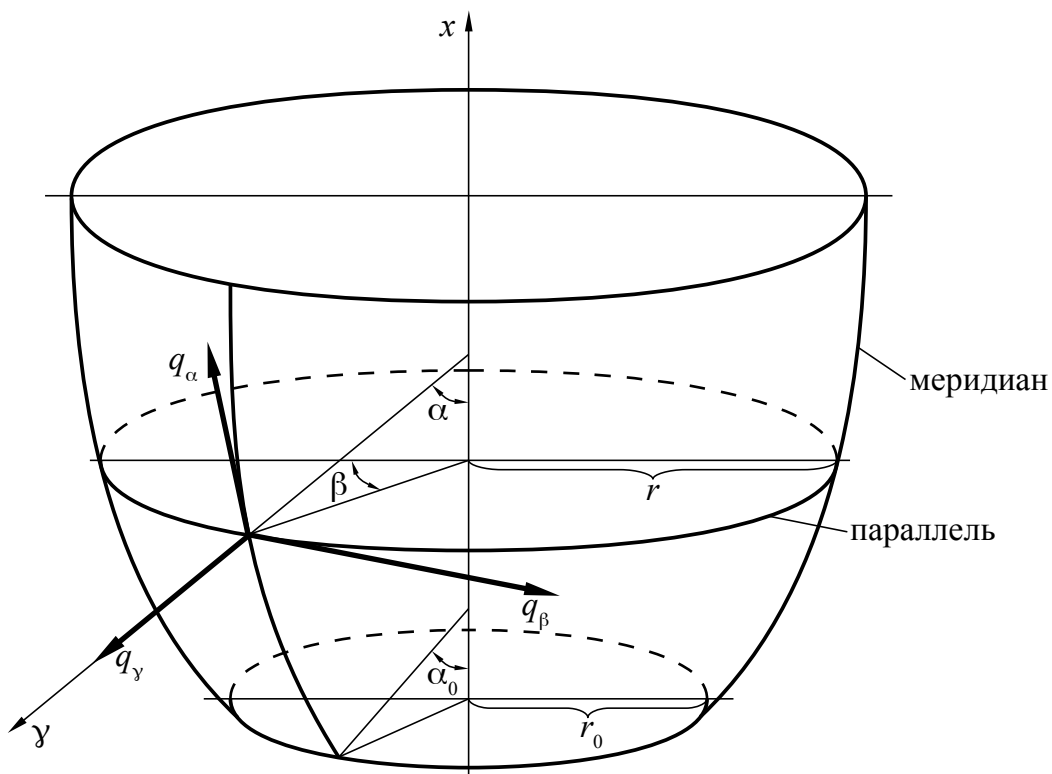


Рис. 1.2. Оболочка вращения

Такая кривая называется м е р и д и а н о м . Меридианы являются линиями главных кривизн и их принимают в качестве координатных линий. Окружности, образованные пересечением срединной поверхности оболочки вращения с плоскостями, перпендикулярными ее оси вращения  $x$ , называются п а р а л л е л я м и , они представляют собой семейство других координатных линий. При этом необходимо обратить внимание на то, что параллели не являются линиями главных кривизн в соответствии с данным выше определением.

В качестве криволинейных координат, отсчитываемых вдоль меридианов и параллелей, возьмем соответственно углы  $\alpha$  и  $\beta$ . При этом угол  $\alpha$  – это угол, который нормаль к срединной поверхности образует с осью вращения оболочки  $x$ ; угол  $\beta$  – это угол, отсчитываемый вдоль параллели от некоторой заданной меридиональной плоскости.

Первый главный радиус кривизны срединной поверхности оболочки вращения  $R_1$  равен радиусу кривизны меридиана. Второй главный радиус  $R_2$  равен отрезку нормали к срединной поверхности до оси вращения оболочки  $x$  (рис. 1.3)

$$R_2 = \frac{r}{\sin \alpha}, \quad (1.2)$$

где  $r$  – радиус параллели.

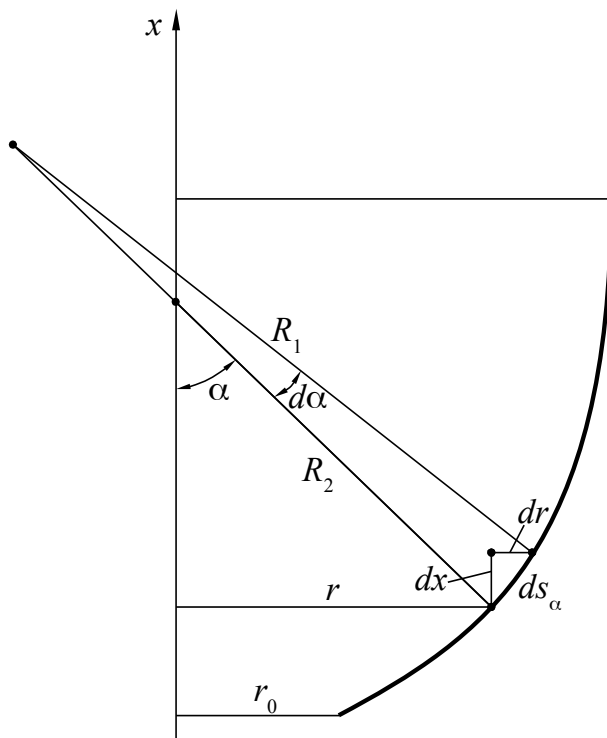


Рис. 1.3. Геометрия меридиана оболочки вращения

Радиусы  $R_1$  и  $R_2$  не являются независимыми. Из рис. 1.3 следует, что

$$ds_\alpha = R_1 d\alpha \text{ и } ds_\alpha = \frac{dr}{\cos \alpha}. \quad (1.3)$$

Откуда

$$R_1 \cos \alpha \, d\alpha = dr. \quad (1.4)$$

С учетом (1.2) получим

$$R_1 \cos \alpha = \frac{dr}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} (R_2 \sin \alpha). \quad (1.5)$$

### 1.1.2. Основные соотношения безмоментной теории оболочек вращения

Рассмотрим тонкую оболочку вращения (рис. 1.2), считая, что она находится в безмоментном напряженном состоянии. Выделим бесконечно малый элемент оболочки (рис. 1.4), находящийся под действием усилий  $N_\alpha$ ,  $N_\beta$ ,  $N_{\alpha\beta}$  и заданной поверхностной нагрузки с компонентами  $q_\alpha$ ,  $q_\beta$ ,  $q_\gamma$ , направленными вдоль координатных линий  $\alpha$ ,  $\beta$  и нормали  $\gamma$  соответственно.

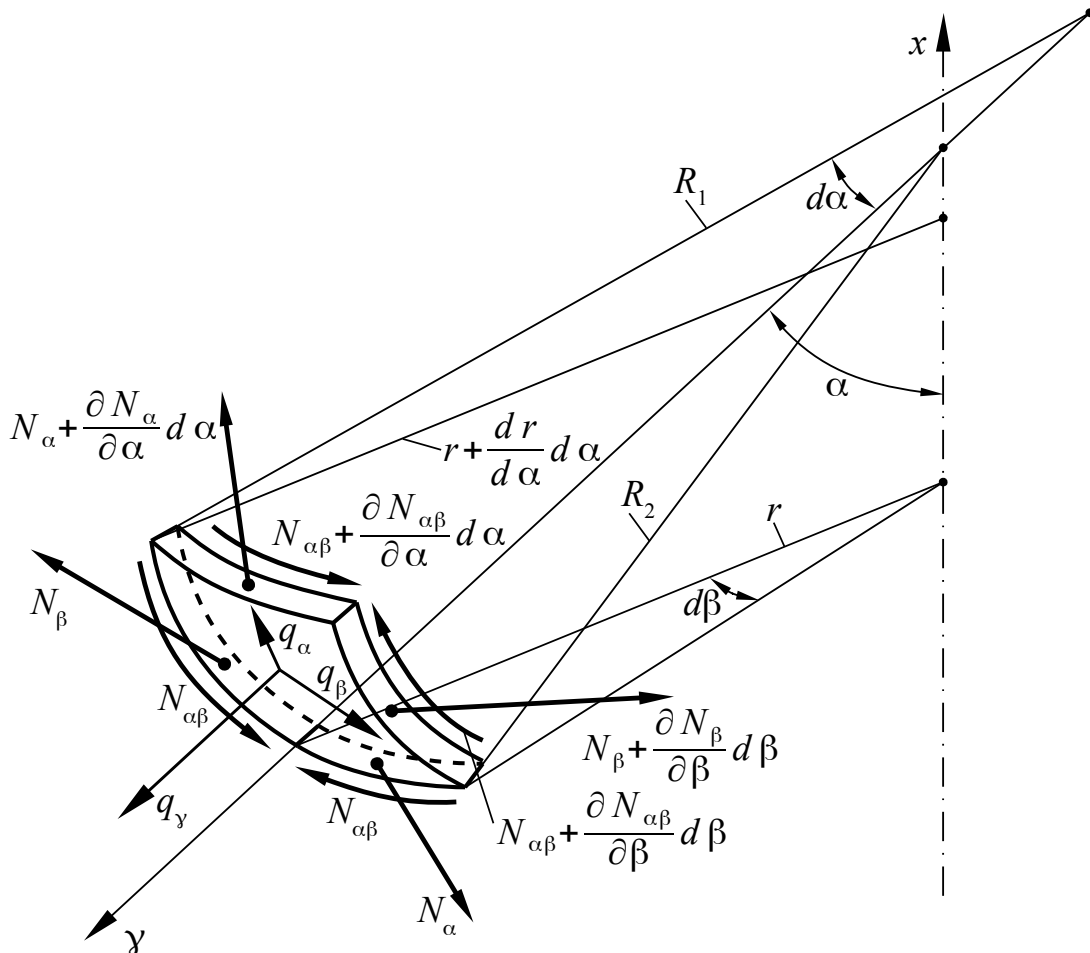


Рис. 1.4. К рассмотрению равновесия элемента оболочки вращения при безмоментном напряженном состоянии

Составим уравнения равновесия рассматриваемого элемента оболочки. В направлении касательной к меридиану получим



$$\begin{aligned}
& -N_{\alpha} r d\beta + \left( N_{\alpha} + \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial \alpha} d\alpha \right) \left( r + \frac{dr}{d\alpha} d\alpha \right) d\beta - N_{\alpha\beta} R_1 d\alpha + \\
& + \left( N_{\alpha\beta} + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} d\beta \right) R_1 d\alpha - N_{\beta} R_1 d\alpha \cos \alpha d\beta + q_{\alpha} R_1 r d\alpha d\beta = 0. \quad (1.6)
\end{aligned}$$

В направлении касательной к параллели

$$\begin{aligned}
& -N_{\alpha\beta} r d\beta + \left( N_{\alpha\beta} + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \alpha} d\alpha \right) \left( r + \frac{dr}{d\alpha} d\alpha \right) d\beta - N_{\beta} R_1 d\alpha + \\
& + \left( N_{\beta} + \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \beta} d\beta \right) R_1 d\alpha + N_{\alpha\beta} R_1 d\alpha \cos \alpha d\beta + q_{\beta} R_1 r d\alpha d\beta = 0. \quad (1.7)
\end{aligned}$$

В направлении нормали к поверхности

$$-N_{\alpha} r d\beta d\alpha - N_{\beta} R_1 d\alpha \sin \alpha d\beta + q_{\gamma} R_1 r d\alpha d\beta = 0, \quad (1.8)$$

где учтен угол между усилиями  $N_{\alpha}$  на нижней и верхней гранях, равный  $\pi - d\alpha$ , и угол между усилиями  $N_{\beta}$  на боковых гранях, равный  $\pi - \sin \alpha d\beta$ .

В результате уравнения равновесия оболочки вращения в безмоментном напряженном состоянии записываются в виде

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \alpha} (r N_{\alpha}) + \frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial \beta} R_1 - N_{\beta} R_1 \cos \alpha + q_{\alpha} R_1 r = 0; \\
& \frac{\partial}{\partial \alpha} (r N_{\alpha\beta}) + \frac{\partial N_{\beta}}{\partial \beta} R_1 + N_{\alpha\beta} R_1 \cos \alpha + q_{\beta} R_1 r = 0; \\
& \frac{N_{\alpha}}{R_1} + \frac{N_{\beta}}{R_2} = q_{\gamma}.
\end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

### 1.1.3. Осесимметричное нагружение оболочки вращения

Одним из распространенных случаев нагружения оболочек вращения является осесимметричное нагружение, при котором  $q_{\beta} = N_{\alpha\beta} = 0$ , а  $N_{\alpha}$  и  $N_{\beta}$  не зависят от окружной координаты  $\beta$ . При этом система уравнений (1.9) примет вид

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \alpha} (r N_{\alpha}) - N_{\beta} R_1 \cos \alpha + q R_1 r = 0; \\
& \frac{N_{\alpha}}{R_1} + \frac{N_{\beta}}{R_2} = p,
\end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

где  $q = q_{\alpha}$ ;  
 $p = q_{\gamma}$ .

Найдем усилия  $N_{\alpha}$  и  $N_{\beta}$ . Из второго уравнения системы (1.10) получим

$$N_{\beta} = p R_2 - N_{\alpha} \frac{R_2}{R_1}. \quad (1.11)$$

В результате подстановки (1.11) в первое уравнение системы (1.10) получим

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(r N_{\alpha}) = p R_2 R_1 \cos \alpha - N_{\alpha} R_2 \cos \alpha - q R_1 r. \quad (1.12)$$

Умножим левую и правую части равенства (1.12) на  $\sin \alpha$  и с учетом (1.2) получим

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(r N_{\alpha}) \sin \alpha = p R_1 r \cos \alpha - N_{\alpha} r \cos \alpha - q R_1 r \sin \alpha. \quad (1.13)$$

Перегруппируем члены (1.13)

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(r N_{\alpha}) \sin \alpha + N_{\alpha} r \cos \alpha = (p \cos \alpha - q \sin \alpha) R_1 r. \quad (1.14)$$

Окончательно получим

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(r N_{\alpha} \sin \alpha) = (p \cos \alpha - q \sin \alpha) R_1 r. \quad (1.15)$$

Проинтегрируем (1.15)

$$N_{\alpha} = \frac{1}{r \sin \alpha} \left[ \int_{\alpha_0}^{\alpha} (p \cos \alpha - q \sin \alpha) R_1 r d \alpha - \frac{X_0}{2\pi} \right]. \quad (1.16)$$

Таким образом, усилия в осесимметрично нагруженной безмоментной оболочке вращения определяются равенствами (1.11) и (1.16).

Наиболее распространенным случаем осесимметричного нагружения является воздействие на оболочку равномерного избыточного внутреннего давления  $p$ . При этом  $q=0$ ,  $p=\text{const}$ . Тогда из выражения (1.16) с учетом (1.4) получим

$$N_{\alpha} = \frac{1}{r \sin \alpha} \left( p \frac{r^2 - r_0^2}{2} - \frac{X_0}{2\pi} \right). \quad (1.17)$$

Если оболочка замкнута в вершине, то  $r_0=0$  (рис. 1.3).

Если осевая сила отсутствует ( $X_0=0$ ), то из (1.11) и (1.17) с учетом (1.2) получим

$$\left. \begin{aligned} N_{\alpha} &= \frac{p R_2}{2}; \\ N_{\beta} &= \frac{p R_2}{2} \left( 2 - \frac{R_2}{R_1} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

Формулы (1.18) определяют усилия в замкнутых баллонах давления, в обшивке фюзеляжа самолета с гермокабиной, летящего на большой высоте и т.п.

Например, для сферического баллона ( $R_1=R_2=R$ )

$$N_{\alpha} = N_{\beta} = \frac{p R}{2}. \quad (1.19)$$

Для цилиндрической части фюзеляжа ( $R_1 \rightarrow \infty$ ,  $R_2=R$ )

$$N_{\alpha} = \frac{p R}{2}; N_{\beta} = p R. \quad (1.20)$$

В этом случае окружные усилия  $N_{\beta}$  в два раза больше продольных усилий  $N_{\alpha}$ . Поэтому разрушение фюзеляжа при превышении допустимой величины

внутреннего избыточного давления происходит с образованием продольной трещины.

## 1.2. Балочная теория оболочек

### 1.2.1. Основные определения и допущения

Элементы планера летательного аппарата, как правило, представляют собой удлиненные тонкостенные оболочки цилиндрической или конической формы (фюзеляж, крыло и др.). Оболочка в этом случае чаще всего состоит из тонкой обшивки, подкрепленной продольным (лонжеронами, продольными стенками, стрингерами) и поперечным (нервюрами – в крыле и оперении, шпангоутами – в фюзеляже) силовым набором, который помогает оболочке воспринимать действующие на нее нагрузки. На рис. 1.5 схематично показаны основные силовые элементы крыла.

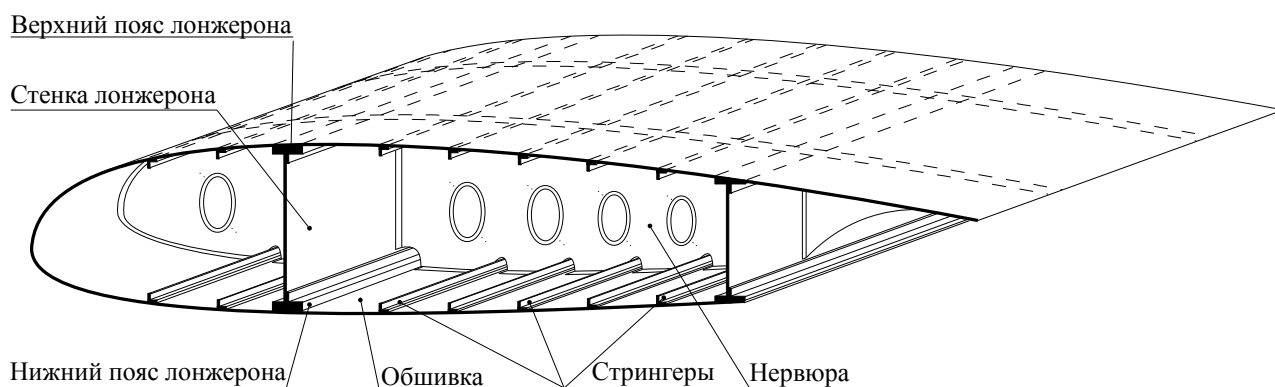


Рис. 1.5. Силовые элементы крыла

Воспользуемся данным выше определением срединной поверхности, т.е. поверхности, которая делит толщину обшивки пополам. Кривая, которая получается при пересечении срединной поверхности плоскостью, перпендикулярной продольной оси оболочки, называется **контуром поперечного сечения**.

Поперечное сечение оболочки может иметь контур (рис. 1.6):

- открытый;
- однозамкнутый;
- многозамкнутый.

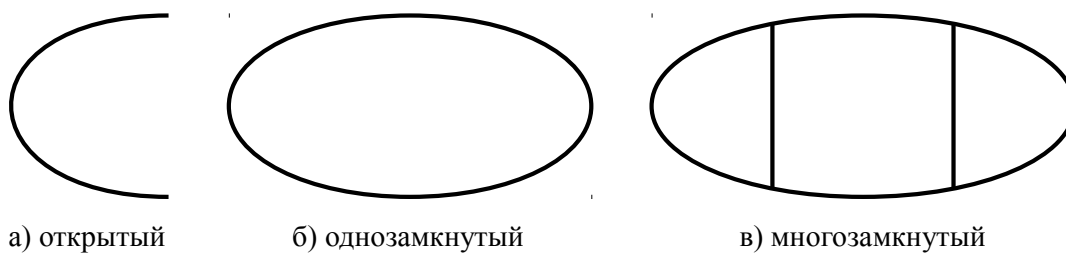


Рис. 1.6. Виды контуров поперечных сечений оболочки

Рассматриваемые удлиненные тонкостенные оболочки воспринимают поперечные силы  $Q_x$ ,  $Q_y$ , осевую силу  $N$ , изгибающие моменты  $M_x$ ,  $M_y$  и крутящий момент  $M_z$  (рис. 1.7), т.е. работают как стержни-балки. Поэтому теория, описывающая их работу, называется балочной. Данная теория справедлива для удлиненных оболочек регулярной конструкции, т.е. не имеющих резких перепадов жесткости по длине.

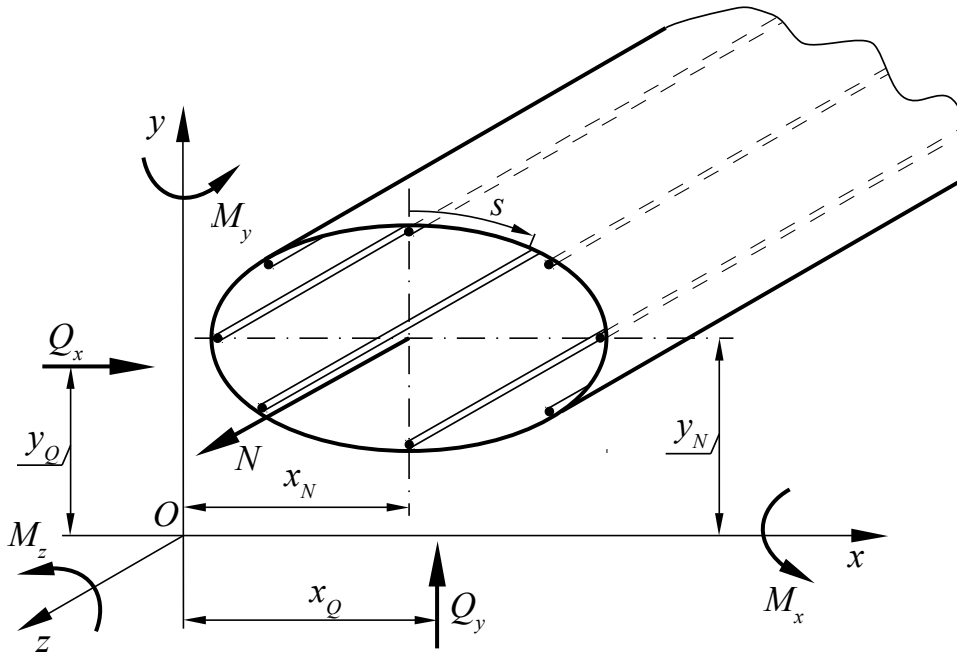


Рис. 1.7. Силовые факторы, действующие в поперечном сечении оболочки

Балочная теория оболочек основана на следующих допущениях и гипотезах:

1. Контур поперечного сечения оболочки считается недеформируемым в своей плоскости. Это допущение основано на том, что реальные конструкции имеют, как правило, достаточно частый поперечный набор из нервюр или шпангоутов.

2. Относительные линейные деформации  $\varepsilon_z$  вдоль продольной оси оболочки (оси  $z$  на рис. 1.7) в любом поперечном сечении оболочки распределяются по закону плоских сечений, т.е. не учитывается известная из дисциплины «Сопротивление материалов» деформация сечения. Для сечений, находящихся далеко от заделки, это считается допустимым.

3. Действующие на оболочку нагрузки в каждом поперечном сечении сводятся к следующим силовым факторам:

- осевой силе  $N$ ;
- поперечным силам  $Q_x$ ,  $Q_y$ ;
- изгибающим моментам  $M_x$ ,  $M_y$ ;
- крутящему моменту  $M_z$ .

4. Продольные подкрепляющие обшивку элементы (пояса лонжеронов, стрингеры) работают только на растяжение-сжатие, т.е. воспринимают только нормальные напряжения  $\sigma_z$ , которые вызваны действием изгибающих моментов  $M_x$ ,  $M_y$  и осевой силы  $N$ . При этом считается, что нормальные напряжения  $\sigma_z$  равномерно распределены по сечению элемента.

5. Нормальные  $\sigma_z$  и касательные  $\tau$  напряжения по толщине обшивки распределены равномерно. Это допущение основано на том, что толщина обшивки мала по сравнению с размерами сечения, вследствие чего ее можно считать безмоментной оболочкой. Если толщина обшивки также мала по сравнению с размерами поперечных сечений продольных элементов, то можно ввести допущение о том, что обшивка вообще не работает на растяжение-сжатие от действия изгибающих моментов  $M_x$ ,  $M_y$  и осевой силы  $N$ , т.е. в ней не возникают нормальные напряжения  $\sigma_z$ . В этом случае изгибающие моменты  $M_x$ ,  $M_y$  и осевая сила  $N$  воспринимаются только продольными элементами, а обшивка работает только на сдвиг от действия поперечных сил  $Q_x$ ,  $Q_y$  и крутящего момента  $M_z$ , т.е. в ней возникают только касательные напряжения  $\tau$ . Если же толщина обшивки значительна по сравнению с размерами поперечных сечений продольных элементов, то ее работой на растяжение-сжатие пренебрегать не следует. В этом случае обшивку можно привести к продольным элементам путем условной замены сечения оболочки системой сосредоточенных площадей, состоящих из площадей сечений продольных элементов с присоединенными площадями участков обшивки, расположенных между продольными элементами (рис. 1.8а). Но можно применить и другую расчетную схему, в которой наоборот площади поперечных сечений продольных элементов равномерно распределяются по контуру поперечного сечения оболочки (рис. 1.8б). В этом случае обшивка условно становится толще, что сказывается на величине нормальных напряжений  $\sigma_z$ , действующих в ней. При расчете же касательных напряжений  $\tau$ , действующих в обшивке, необходимо учитывать только реальную толщину обшивки, без условного утолщения за счет продольных элементов.

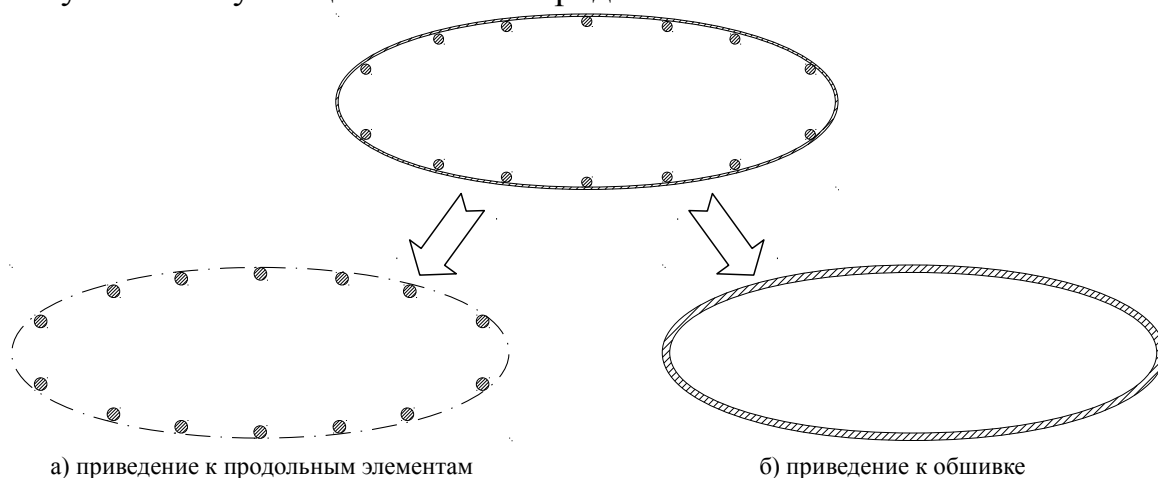


Рис. 1.8. Виды расчетных схем тонкостенных подкрепленных оболочек

6. Напряжения в элементах подкрепленной тонкостенной оболочки определяются законом Гука, т.е. не выходят за предел пропорциональности.

7. Считается, что элементы оболочки не теряют устойчивости.

### 1.2.2. Определение нормальных напряжений

#### Редуцирование сечения по материалу

Если все элементы оболочки выполнены из одного материала с модулем упругости  $E$ , то нормальные напряжения  $\sigma_z$  ввиду принятого выше допущения о распределении относительных линейных деформаций  $\varepsilon_z$  по закону плоских сечений вычисляются по формуле

$$\sigma_z = E \varepsilon_z. \quad (1.21)$$

Однако реальные конструкции часто имеют в своем составе элементы из разных материалов. При расчете таких оболочек все элементы обычно приводятся к одному материалу. Эту операцию приведения называют р е д у ц и р о в а н и е м с е ч е н и я п о м а т е р и а л у .

Редуцирование производится следующим образом. Пусть в сечении оболочки имеется некий  $i$ -й элемент с модулем упругости  $E_i$ , отличным от модуля упругости  $E$ , одинакового для всех остальных элементов. Произведем условную замену этого элемента фиктивным редуцированным элементом с модулем упругости  $E$  таким образом, чтобы усилия в действительном и в редуцированном элементах были равны, т.е. (индекс «  $z$  » для краткости опущен)

$$\sigma_i F_i = \sigma_{ip} F_{ip}, \quad (1.22)$$

где  $\sigma_i, \sigma_{ip}$  – нормальные напряжения в действительном и в редуцированном элементах соответственно;

$F_i, F_{ip}$  – площади поперечных сечений действительного и редуцированного элементов соответственно.

Кроме того, должны быть равны относительные линейные деформации действительного и редуцированного элементов

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{ip}, \text{ т.е. } \frac{\sigma_i}{E_i} = \frac{\sigma_{ip}}{E}. \quad (1.23)$$

Введем р е д у ц и о н н ы й к о э ф ф и ц и е н т по материалу

$$\varphi_i = \frac{E_i}{E}. \quad (1.24)$$

Тогда в соответствии с (1.23) можно записать

$$\varphi_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_{ip}}. \quad (1.25)$$

Отсюда, учитывая (1.22), получим формулу для определения площади редуцированного элемента

$$F_{ip} = \varphi_i F_i. \quad (1.26)$$

Отметим, что в качестве материала приведения может быть выбран материал любого элемента оболочки или некоторый несуществующий фиктивный материал.

После выполнения приведения сечения к одному материалу можно перейти непосредственно к расчету нормальных напряжений.

### Формула для нормальных напряжений

Осевая сила  $N$  во всех точках поперечного сечения оболочки вызовет одинаковые напряжения

$$\sigma_z(z, s) = \frac{N}{F}, \quad (1.27)$$

где  $s$  – криволинейная координата, которая отсчитывается по контуру поперечного сечения оболочки от некоторой начальной точки (рис. 1.7);

$F$  – площадь поперечного сечения оболочки.

Из дисциплины «Сопротивление материалов» известно, что при воздействии только изгибающего момента, например,  $M_x$  нормальные напряжения можно определить по формуле

$$\sigma_z(z, s) = \frac{M_x}{I_x} y, \quad (1.28)$$

где  $I_x$  – момент инерции поперечного сечения оболочки относительно оси  $x$  (рис. 1.7);

$y$  – ордината точки контура поперечного сечения оболочки, где вычисляются напряжения.

В случае сложного нагружения, когда в поперечном сечении оболочки действуют как осевая сила  $N$ , так и изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$ , нормальные напряжения можно определить по формуле

$$\sigma_z(z, s) = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x. \quad (1.29)$$

Геометрические характеристики сечения, входящие в выражения (1.27) – (1.29), вычисляются по следующим формулам

$$F = \int_{(s)} \delta ds; \quad I_x = \int_{(s)} \delta y^2 ds; \quad I_y = \int_{(s)} \delta x^2 ds, \quad (1.30)$$

где  $\delta$  – толщина обшивки.

### 1.2.3. Определение касательных напряжений

#### Формула для потока касательных сил

В соответствии с принятыми выше допущениями при поперечном изгибе и кручении оболочки в ее обшивке возникают касательные напряжения, направленные вдоль контура поперечного сечения оболочки и равномерно распределенные по толщине обшивки. В этом случае удобно пользоваться потоком касательных сил

$$q = \tau \delta. \quad (1.31)$$

Выведем формулу для определения потока касательных сил.

Выделим из обшивки элемент с размерами  $dsdz$  (рис. 1.9а) и рассмотрим его равновесие при неизменной осевой силе ( $N = \text{const}$ ) (рис. 1.9б).

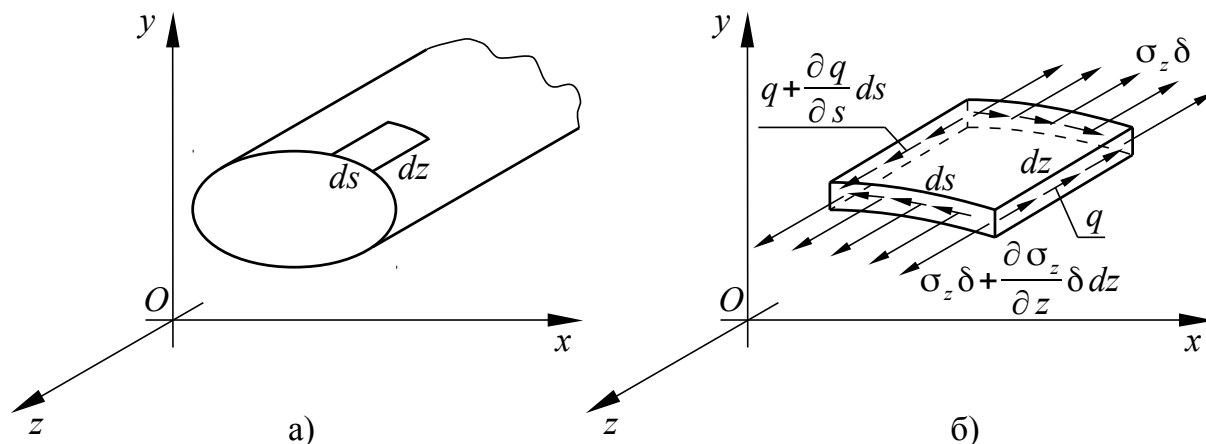


Рис. 1.9. К рассмотрению равновесия элемента обшивки

Найдем проекции всех действующих на этот элемент сил на ось  $z$

$$\left( \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) \delta ds - \sigma_z \delta ds + \left( q + \frac{\partial q}{\partial s} ds \right) dz - q dz = 0. \quad (1.32)$$

После элементарных преобразований получим

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \delta + \frac{\partial q}{\partial s} = 0. \quad (1.33)$$

Найдем из этого уравнения поток касательных сил  $q$  путем интегрирования по дуге контура  $s$  от произвольно взятой точки, в которой  $s = 0$

$$q(s, z) = - \int_0^s \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \delta ds + q_0(0, z). \quad (1.34)$$

где  $q_0(0, z)$  – значение потока касательных сил в точке начала отсчета ( $s = 0$ ).

Чтобы найти частную производную  $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$ , стоящую в подынтегральном выражении в формуле (1.34), продифференцируем выражение для нормальных напряжений (1.29)

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{y}{I_x} \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{x}{I_y} \frac{\partial M_y}{\partial z}. \quad (1.35)$$

Из дисциплины «Сопротивление материалов» известно, что

$$\frac{\partial M_x}{\partial z} = Q_y; \quad \frac{\partial M_y}{\partial z} = -Q_x. \quad (1.36)$$

С учетом этого перепишем выражение (1.35)

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{y}{I_x} Q_y + \frac{x}{I_y} Q_x. \quad (1.37)$$



Полученное выражение подставим в (1.34)

$$q = -\frac{Q_y}{I_x} \int_0^s y \delta ds - \frac{Q_x}{I_y} \int_0^s x \delta ds + q_0. \quad (1.38)$$

Здесь интегралы представляют собой статические моменты отсеченной части контура (участка контура на дуге от 0 до  $s$ )

$$S_x^{\text{отс}}(s) = \int_0^s y \delta ds; \quad S_y^{\text{отс}}(s) = \int_0^s x \delta ds. \quad (1.39)$$

Введем обозначения:

$$q_{Qx} = -\frac{Q_x S_y^{\text{отс}}}{I_y}; \quad q_{Qy} = -\frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{I_x}. \quad (1.40)$$

где  $q_{Qx}$ ,  $q_{Qy}$  – потоки касательных сил от действия поперечных сил  $Q_x$  и  $Q_y$  соответственно.

Тогда выражение (1.38) можно переписать следующим образом:

$$q = q_{Qx} + q_{Qy} + q_0. \quad (1.41)$$

Следует отметить, что знаки статических моментов  $S_x^{\text{отс}}$  и  $S_y^{\text{отс}}$  зависят от знаков координат  $x$  и  $y$ , а также от принятого начала отсчета криволинейной координаты  $s$ . Знак потока касательных сил  $q_Q$  определяется знаками поперечных сил  $Q_x$ ,  $Q_y$  и знаками статических моментов  $S_x^{\text{отс}}$ ,  $S_y^{\text{отс}}$ . При этом положительный поток касательных сил  $q_Q$  совпадает по направлению с направлением обхода контура. За положительное направление обхода контура обычно принимается направление против часовой стрелки.

После определения потока касательных сил  $q$  можно найти касательные напряжения, используя выражение (1.31)

$$\tau = \frac{q}{\delta}. \quad (1.42)$$

### **Определение потока касательных сил в оболочках с открытым контуром поперечного сечения. Центр изгиба**

Рассмотрим оболочку с открытым контуром поперечного сечения произвольной формы (1.10). Криволинейную координату  $s$  будем отсчитывать от свободного края оболочки (точка  $A$ ). Пусть осевая сила отсутствует ( $N = 0$ ). Тогда край оболочки будет свободен от нагрузки, а это значит, что поток касательных сил в точке  $A$  будет равен 0, т.е.  $q_0 = 0$ . Следовательно, поток касательных сил  $q$  в соответствии с формулой (1.41) будет определяться только потоками  $q_{Qx}$  и  $q_{Qy}$

$$q = q_Q = q_{Qx} + q_{Qy} = -\frac{Q_x S_y^{\text{отс}}}{I_y} - \frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{I_x}. \quad (1.43)$$

Из полученного выражения следует, что поток касательных сил в сечении оболочки с открытым контуром поперечного сечения не зависит от величины крутящего момента  $M_z$ . Это говорит о том, что в оболочках с открытым конту-

ром отсутствуют внутренние усилия, уравнивающие крутящий момент. Следовательно, такие оболочки не воспринимают крутящий момент и представляют собой в этом случае нагружения геометрически изменяемую систему.

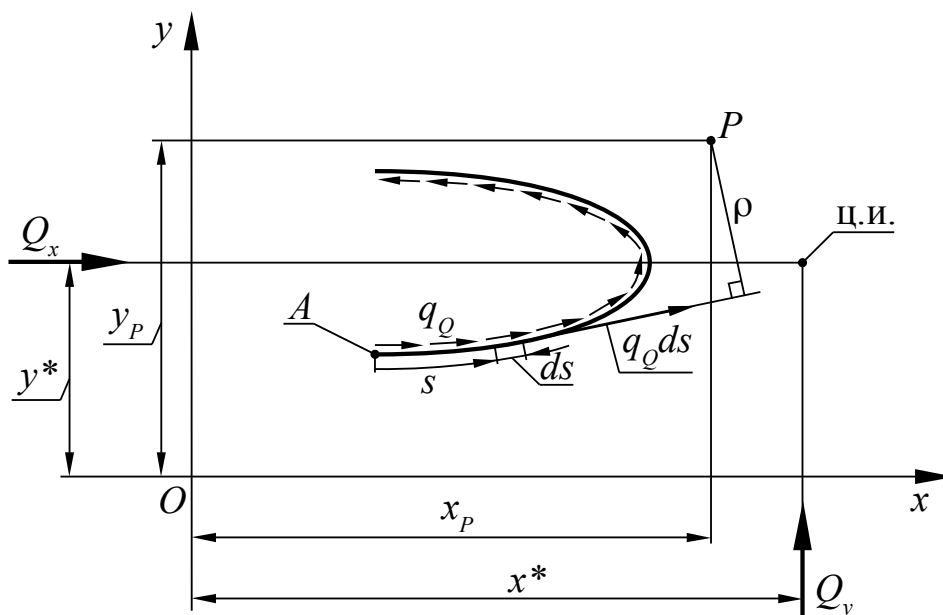


Рис. 1.10. К определению потока касательных сил в оболочках с открытым контуром поперечного сечения

Представляет интерес точка, через которую проходит равнодействующая потока касательных сил, действующих в сечении. Найдем ее координаты  $x^*$  и  $y^*$ . Для этого составим уравнения моментов относительно любой оси, параллельной оси  $z$ . Эта ось оставит в плоскости  $(x, y)$  след в виде точки  $P(x_P, y_P)$ , которую назовем полюсом (рис. 1.10).

Составим уравнение моментов для силы  $Q_y$

$$Q_y(x^* - x_P) = \int_{(s)} q_{Q_y} \rho ds, \quad (1.44)$$

где  $\rho = \rho(s)$  – расстояние от полюса до касательной в текущей точке контура, т.е. плечо элементарной касательной силы  $q_{Q_y} ds$  (рис. 1.10).

Поскольку  $q_{Q_y} = -\frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{I_x}$  (формулы 1.40), то

$$Q_y(x^* - x_P) = -\frac{Q_y}{I_x} \int_{(s)} S_x^{\text{отс}} \rho ds. \quad (1.45)$$

Откуда

$$x^* = -\frac{1}{I_x} \int_{(s)} S_x^{\text{отс}} \rho ds + x_P. \quad (1.46)$$

Для силы  $Q_x$  аналогично получим

$$y^* = -\frac{1}{I_y} \int S_y^{\text{отс}} \rho ds + y_P. \quad (1.47)$$

Точка с координатами  $(x^*, y^*)$  называется центром изгиба (ц.и.) (рис. 1.10) или центром жесткости (ц.ж.). Как видно из формул (1.46) и (1.47), положение этой точки не зависит от действующих нагрузок и определяется только геометрическими характеристиками сечения. Совокупность центров изгиба сечений по длине оболочки образует ось изгиба или ось жесткости.

Если линия действия поперечной силы проходит через центр изгиба оболочки с открытым контуром, то оболочка будет испытывать только поперечный изгиб. При этом в ее обшивке будет возникать соответствующий поток касательных сил. Если же линия действия поперечной силы проходит не через центр изгиба рассматриваемой оболочки, то она дополнительно создает крутящий момент относительно центра изгиба. Данный момент, как было указано выше, теоретически не может быть воспринят оболочкой, поскольку соответствующий поток касательных сил в оболочке с открытым контуром не возникает. На практике это означает, что при таком приложении нагрузки оболочка скорее всего будет разрушена или, по крайней мере, получит недопустимые деформации.

### Определение потока касательных сил в оболочках с однозамкнутым контуром поперечного сечения

Рассмотрим оболочку с однозамкнутым контуром поперечного сечения, нагруженную поперечными силами  $Q_x$ ,  $Q_y$  и крутящим моментом  $M_z$  (рис. 1.11).

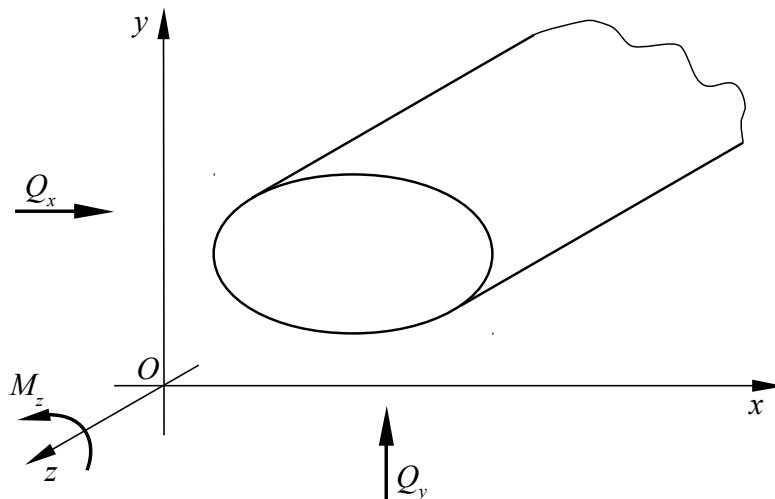


Рис. 1.11. Нагружение оболочки с однозамкнутым контуром поперечного сечения

Для определения потока касательных сил в оболочках данного типа используют следующий прием. Оболочка условно разрезается вдоль образующей

в произвольном месте поперечного сечения (рис. 1.12). Рассматриваемая оболочка превращается, таким образом, в оболочку с открытым контуром поперечного сечения. Место разреза служит началом отсчета статических моментов отсеченной части поперечного сечения ( $s = 0$ ).

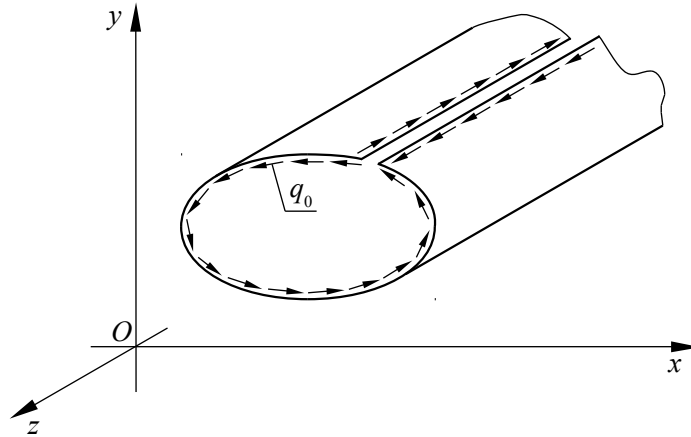


Рис. 1.12. Условное превращение оболочки с однозамкнутым контуром поперечного сечения в оболочку с открытым контуром

Однако поскольку разрез был сделан условно, то считать, что  $q_0 = 0$ , как было в предыдущем случае, нельзя. В общем случае  $q_0$  должен быть отличен от нуля и иметь постоянное значение ( $q_0 = \text{const}$ ). Поэтому полный поток касательных сил для однозамкнутого контура будет определяться по формуле

$$q = q_Q + q_0. \quad (1.48)$$

Поток касательных сил  $q_Q$  можно определить как для открытого контура по формуле (1.43), а для определения потока касательных сил  $q_0$  необходимо составить уравнение моментов относительно произвольно выбранного полюса  $P$  с координатами  $(x_P, y_P)$  (рис. 1.13).

Уравнение крутящего момента в данном случае будет иметь вид

$$M_{\text{кр}} = M_z - Q_y(x_P - x_Q) + Q_x(y_P - y_Q) = \oint q \rho ds. \quad (1.49)$$

Из уравнения (1.48) с учетом того, что  $q_0 = \text{const}$ , следует

$$\oint q \rho ds = \oint q_Q \rho ds + q_0 \oint \rho ds. \quad (1.50)$$

Из уравнений (1.49) и (1.50) получим

$$q_0 = \frac{M_{\text{кр}}}{\oint \rho ds} - \frac{\oint q_Q \rho ds}{\oint \rho ds}. \quad (1.51)$$

Интеграл  $\oint \rho ds$  имеет следующий геометрический смысл. Из рис. 1.13 видно, что подынтегральное выражение  $\rho ds$  является удвоенной площадью элементарного треугольника с вершиной в точке  $P$  и основанием  $ds$ . Следовательно, интеграл  $\oint \rho ds$  является удвоенной площадью контура поперечного сечения оболочки (рис. 1.14)

$$\oint \rho ds = 2\omega. \quad (1.52)$$

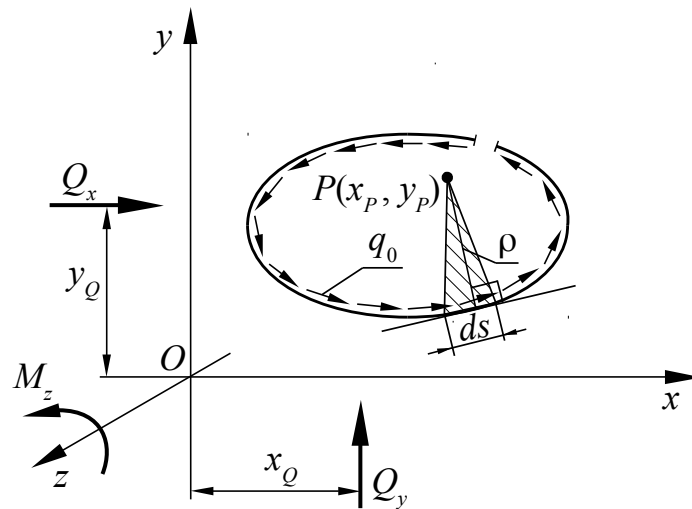


Рис. 1.13. К определению потока касательных сил  $q_0$  в оболочке с однозамкнутым контуром поперечного сечения

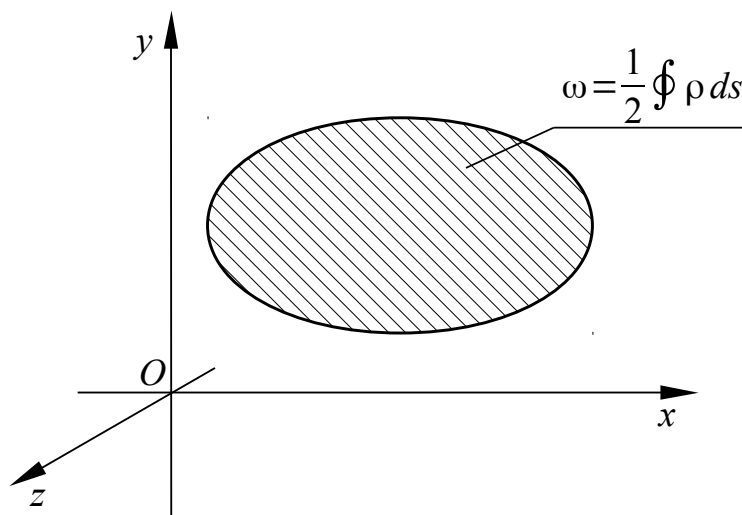


Рис. 1.14. К определению площади контура поперечного сечения оболочки

С учетом этого перепишем формулу (1.51)

$$q_0 = \frac{M_{кр}}{2\omega} - \frac{\oint q_Q \rho ds}{2\omega}. \quad (1.53)$$

Если в поперечном сечении оболочки действует только крутящий момент  $M_{кр} = M_z$ , то

$$q = q_0 = \frac{M_z}{2\omega}. \quad (1.54)$$

Эта формула называется ф о р м у л о й Б р е д т а .

Таким образом, оболочки с однозамкнутым контуром поперечного сечения воспринимают произвольно приложенные поперечные силы  $Q_x$  и  $Q_y$ , а так-

же крутящий момент  $M_z$ . Возникающие при этом напряжения определяются, как показано выше, только из уравнений равновесия, поэтому оболочки с однозамкнутым контуром поперечного сечения являются статически определимыми.

### Определение потока касательных сил в оболочках с многозамкнутым контуром поперечного сечения

В качестве примера оболочки с многозамкнутым контуром поперечного сечения можно привести крыло современного самолета транспортной категории, имеющее, как правило, несколько лонжеронов и продольных стенок.

Рассмотрим оболочку с  $n$  раз замкнутым контуром поперечного сечения, нагруженную поперечными силами  $Q_x$ ,  $Q_y$  и крутящим моментом  $M_z$  (рис. 1.15).

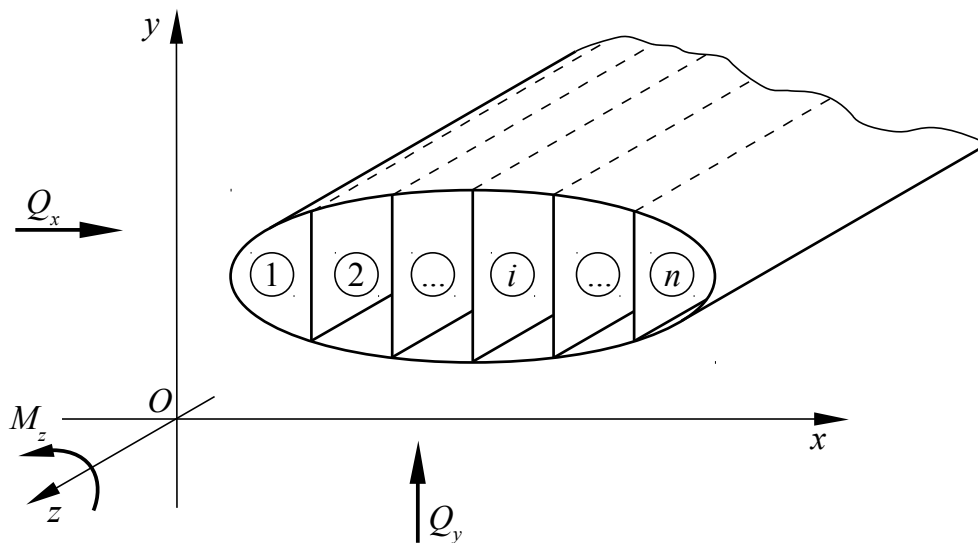


Рис. 1.15. Нагружение оболочки с многозамкнутым контуром поперечного сечения

Чтобы решить задачу отыскания потока касательных сил  $q$  в оболочке с  $n$  раз замкнутым контуром поперечного сечения, необходимо сначала превратить рассматриваемую оболочку в оболочку с открытым контуром, разрезав каждый из  $n$  контуров. При этом необходимо приложить  $n$  неизвестных потоков касательных сил  $q_{0i}$  (рис. 1.16), поскольку как и в случае с однозамкнутым контуром разрезы делаются условно.

Составим уравнение моментов относительно произвольно выбранного полюса  $P(x_P, y_P)$ :

$$\sum_{i=1}^n q_{0i} 2 \omega_i + \oint q_Q \rho ds = M_z - Q_y (x_P - x_Q) + Q_x (y_P - y_Q). \quad (1.55)$$

Данное уравнение содержит  $n$  неизвестных потоков  $q_{0i}$ . Таким образом, данная задача является  $(n - 1)$  раз статически неопределимой. Для ее решения необходимо использовать условие совместности деформаций.

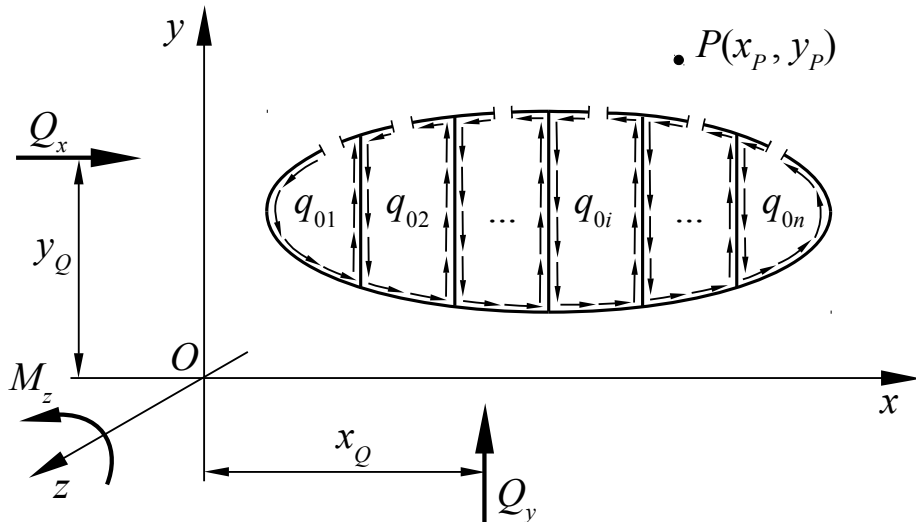


Рис. 1.16. К определению потоков касательных сил  $q_{0i}$  в оболочке с многозамкнутым контуром поперечного сечения

Таким условием служит равенство углов поворота каждого  $i$ -го контура оболочки и угла поворота всего сечения в целом

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_i = \dots = \theta_n = \theta. \quad (1.56)$$

Это условие вытекает из принятого выше допущения о недеформируемости контура поперечного сечения оболочки в своей плоскости.

Основываясь на выражении для потенциальной энергии деформации, полученном в части I настоящего учебного пособия, запишем формулу, описывающую распределенную дополнительную потенциальную энергию деформации, т.е. энергию, соответствующую единице длины оболочки, для некоторого  $i$ -го контура многозамкнутого сечения

$$\overline{U}_i = \oint_{s_i} \frac{\tau^2}{2G} \delta ds = \oint_{s_i} \frac{q^2}{2G\delta} ds. \quad (1.57)$$

В соответствии с формулой Бредта (1.54) запишем выражение для крутящего момента, создаваемого потоком касательных сил  $q_{0i}$  в  $i$ -м контуре

$$M_i = 2q_{0i}\omega_i. \quad (1.58)$$

В соответствии с теоремой Кастильяно, приведенной в части I настоящего учебного пособия, которая гласит, что частная производная от дополнительной потенциальной энергии по силовому фактору равна перемещению по направлению этого силового фактора, запишем выражение для угла закручивания  $i$ -го контура

$$\theta_i = \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial M_i}. \quad (1.59)$$

Выполним преобразования с учетом того, что  $q_{0i} = \frac{M_i}{2\omega_i}$  (формула (1.58))

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial M_i} = \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial q_{0i}} \frac{\partial q_{0i}}{\partial M_i} = \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial q_{0i}} \frac{1}{2 \omega_i}. \quad (1.60)$$

После дифференцирования с учетом того, что  $q = q_Q + \sum_{i=1}^n q_{0i}$ , получим

$$\theta_i = \frac{1}{2 \omega_i} \oint_{s_i} \frac{q_Q + \sum_{i=1}^n q_{0i}}{G \delta} ds. \quad (1.61)$$

Данное выражение представляет собой одно из уравнений системы, содержащей  $n$  уравнений с числом неизвестных, равным  $(n + 1)$ :  $n$  неизвестных потоков  $q_{0i}$  и один угол закручивания  $\theta_i = \theta$ .

Таким образом, для решения задачи не хватает одного уравнения, в качестве которого можно использовать уравнение моментов (1.55).

## 2. Статическая устойчивость элементов летательных аппаратов

Нагруженная упругая система может по-разному реагировать на возмущения, выводящие ее из состояния равновесия. Если после исчезновения этих возмущений система возвращается в исходное состояние, то это состояние считается устойчивым. Реакция системы на возмущения зависит как от величины приложенных к ней нагрузок, так и от величины возмущений. При исследовании устойчивости упругих систем полагают, что возмущения имеют сколь угодно малую величину. При этом требуется определить минимальный уровень нагружения системы, при котором сколь угодно малое возмущение приводит к тому, что система не возвращается в исходное состояние равновесия, т.е. происходит потеря устойчивости. Минимальная нагрузка, при которой возникает потеря устойчивости упругой системы, называется критической. Статической устойчивостью упругой системы, таким образом, называется ее способность сохранять исходную форму равновесия при действии внешней нагрузки.

Устойчивость могут терять тонкие длинные стержни, нагруженные сжатием, тонкие пластины и тонкостенные оболочки, нагруженные сжатием и сдвигом.

При потере устойчивости упругой системы, как правило, происходит переход к некоторому новому положению равновесия. Чаще всего это сопровождается большими перемещениями, возникновением пластических деформаций, а также разрушением конструкции. В некоторых случаях после потери устойчивости конструкция продолжает работать и выполнять свои основные функции. Однако необходимо помнить о том, что потеря устойчивости является одной из самых распространенных причин разрушения стержневых и тонкостенных элементов конструкции летательных аппаратов, которые работают при высоких уровнях нагружения и в условиях постоянного воздействия различных



возмущающих факторов. В связи с этим определение критических нагрузок является одной из важнейших задач при оценке прочности элементов конструкции летательных аппаратов.

## 2.1. Основные подходы к исследованию устойчивости упругих систем

Особенности подхода к исследованию устойчивости упругих систем проиллюстрируем с помощью простейшей механической модели. Рассмотрим жесткий стержень, установленный на шарнире (рис. 2.1).

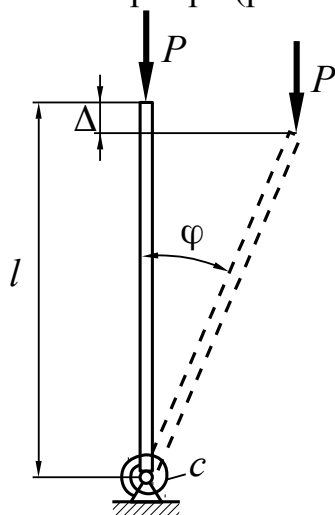


Рис. 2.1. Модель упругой системы (жесткий стержень на упругом шарнире)

В вертикальном положении стержень удерживается упругой пружиной, имеющей линейную характеристику. Это значит, что при повороте стержня на угол  $\varphi$  в шарнире возникает момент, равный  $c\varphi$ , где  $c$  – жесткость пружины.

Пусть к верхнему концу стержня приложена сила  $P$ , которая всегда направлена вертикально вниз, например, сила тяжести некоего груза, закрепленного на конце стержня. Сообщим системе возмущение, т.е. отклоним стержень от исходного вертикального положения на некоторый угол  $\varphi$ . Заметим, что причина этого отклонения не имеет никакого значения. Сила  $P$  создаст относительно шарнира опрокидывающий момент  $Pl\sin\varphi$ , а пружина – восстанавливающий момент  $c\varphi$ . Условие равновесия системы запишется в виде

$$Pl\sin\varphi = c\varphi. \quad (2.1)$$

Легко заметить, что это условие выполняется при любом  $P$ , если  $\varphi = 0$ . Сложнее обстоит дело, если  $\varphi \neq 0$ . Для анализа упругой системы в этом случае перепишем условие (2.1) в следующем виде

$$P \frac{l}{c} = \frac{\varphi}{\sin\varphi}. \quad (2.2)$$

Введем обозначение  $P^* = \frac{c}{l}$  и перепишем формулу (2.2)

$$\frac{P}{P^*} = \frac{\varphi}{\sin \varphi}. \quad (2.3)$$

Из тригонометрии известно, что всегда  $\frac{\varphi}{\sin \varphi} > 1$  при  $\varphi \neq 0$ , тогда и  $\frac{P}{P^*} > 1$ .

Это значит, что при  $\varphi \neq 0$  для обеспечения равновесия необходимо, чтобы  $P > P^*$ .

Из всего вышеизложенного следует, что при  $P < P^*$  возможно только исходное вертикальное положение равновесия, когда  $\varphi = 0$ . Очевидно, что при  $P < P^*$  любое положение, соответствующее малому  $\varphi \neq 0$ , будет неравновесным и после устранения причины, вызвавшей появление угла  $\varphi$ , стержень под действием пружины вернется в вертикальное положение. В соответствии с данным выше определением такое состояние системы будет устойчивым.

При  $P > P^*$  возможны три положения равновесия:  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \varphi^*$ ,  $\varphi = -\varphi^*$ . После снятия возмущения при  $P > P^*$  стержень сохранит наклонное положение равновесия, соответствующее углу  $\varphi^*$  или  $-\varphi^*$ , т.е. исходное вертикальное положение равновесия не будет устойчивым.

Нагрузка, при которой начальное положение равновесия перестает быть устойчивым, и является критической нагрузкой  $P_{кр}$ . В рассматриваемом примере  $P_{кр} = P^* = \frac{c}{l}$ .

В соответствии с этим можно дать следующее определение критической нагрузки, предложенное Л. Эйлером: критическим называется наименьшее значение нагрузки, при котором кроме исходного положения равновесия упругая система может иметь по крайней мере еще одно положение равновесия, близкое к исходному. Это статический подход к определению критической нагрузки.

Рассмотрим энергетический подход. В части I настоящего учебного пособия было введено понятие полной энергии упругой системы

$$\mathcal{E} = U - A, \quad (2.4)$$

где  $U$  – потенциальная энергия деформации упругой системы;

$A$  – работа внешних сил.

Для рассматриваемой модели упругой системы потенциальная энергия деформации, накапливаемая пружиной, будет равна

$$U = \frac{1}{2} c \varphi^2. \quad (2.5)$$

Работа внешних сил  $A$  совершается силой  $P$  на перемещении  $\Delta = l(1 - \cos \varphi)$  (рис. 2.1). Таким образом, в нашем случае полная энергия упругой системы будет равна

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} c \varphi^2 - Pl(1 - \cos \varphi). \quad (2.6)$$

Если считать  $\varphi$  малым, то можно принять, что  $\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ . Тогда уравнение (2.6) запишется в виде

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} c \varphi^2 - \frac{1}{2} P l \varphi^2. \quad (2.7)$$

Согласно теореме Лагранжа–Дирихле равновесное положение системы является устойчивым, если реализуется минимум полной энергии системы, и неустойчивым, если реализуется ее максимум.

Известно, что если вторая производная функции больше нуля  $\left( \frac{d^2 \mathcal{E}}{d \varphi^2} > 0 \right)$ , то имеет место минимум, а если меньше нуля  $\left( \frac{d^2 \mathcal{E}}{d \varphi^2} < 0 \right)$  – то максимум. Критическому же состоянию системы, очевидно, соответствует условие

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{d \varphi^2} = 0. \quad (2.8)$$

Продифференцируем дважды уравнение (2.7) и приравняем вторую производную нулю

$$\frac{d \mathcal{E}}{d \varphi} = c \varphi - P l \varphi, \quad (2.9)$$

$$\frac{d^2 \mathcal{E}}{d \varphi^2} = c - P l = 0. \quad (2.10)$$

Отсюда получим выражение для критической нагрузки, выведенное выше

$$P_{\text{кр}} = \frac{c}{l}. \quad (2.11)$$

Таким образом, согласно энергетическому подходу к р и т и ч е с к и м называется такое значение нагрузки, которое обращает в нуль вторую производную полной энергии упругой системы.

Опишем еще один энергетический подход к определению критической нагрузки. При переводе упругой системы из исходного положения равновесия в некое соседнее положение, которое не обязательно может быть равновесным, внешние силы совершают работу  $A$ . При этом система приобретает потенциальную энергию деформации  $U$ , которая способствует возврату системы в исходное положение. Если работа  $A$  меньше соответствующей энергии деформации  $U$ , то начальное положение упругой системы является устойчивым, а если больше – неустойчивым. Очевидно, что критическое состояние системы описывается условием

$$U = A. \quad (2.12)$$

Учитывая допущение о малости  $\varphi$ , можем записать равенство

$$\frac{1}{2} c \varphi^2 = \frac{1}{2} P l \varphi^2. \quad (2.13)$$

Откуда при  $\varphi \neq 0$  получим выражение для критической нагрузки  $P_{\text{кр}} = \frac{c}{l}$ .

## 2.2. Устойчивость стержней

Рассмотрим стержень, шарнирно опертый по концам, сжатый осевой силой  $N$  (рис. 2.2). Это так называемая «задача Эйлера», ее впервые сформулировал и решил Л. Эйлер.

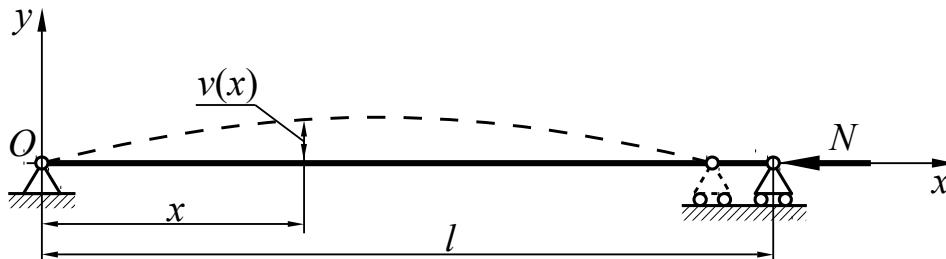


Рис. 2.2. Шарнирно опертый стержень, нагруженный осевой силой

Очевидно, что в докритическом, прямолинейном состоянии в стержне возникнет только осевое усилие  $N$ . Придадим стержню малый прогиб  $v(x)$  и исследуем равновесие искривленной формы.

В изогнутом состоянии стержня воздействие усилия  $N$  можно заменить воздействием условной эквивалентной поперечной нагрузки  $\bar{q}(x)$ . На рис. 2.3а показана часть стержня, нагруженная сжимающими усилиями  $N$ . Если равномерно распределить вертикальные составляющие этих усилий вдоль оси  $x$  на длине элементарного участка  $dx$ , то мы получим эквивалентную поперечную нагрузку  $\bar{q}(x)$  (рис. 2.3б).

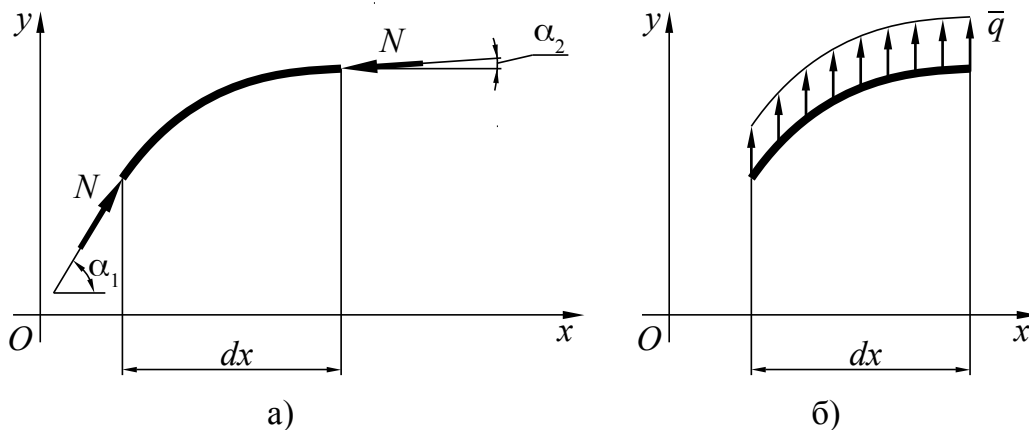


Рис. 2.3. Замена осевых сжимающих усилий эквивалентной поперечной нагрузкой

Таким образом

$$N \sin \alpha_1 - N \sin \alpha_2 = \bar{q} dx. \quad (2.14)$$

Для малых прогибов справедливо  $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ . Тогда

$$\alpha_1 \approx \frac{dv}{dx}, \quad \alpha_2 \approx \frac{dv}{dx} + \frac{d}{dx} \left( \frac{dv}{dx} \right) dx = \frac{dv}{dx} + \frac{d^2 v}{dx^2} dx. \quad (2.15)$$

Подставим (2.15) в (2.14)

$$N \frac{dv}{dx} - N \left( \frac{dv}{dx} + \frac{d^2 v}{dx^2} dx \right) = \bar{q} dx. \quad (2.16)$$

Откуда

$$-N \frac{d^2 v}{dx^2} = \bar{q}. \quad (2.17)$$

Из дисциплины «Соппротивление материалов» известно, что если на стержень действует некая поперечная нагрузка, то при малых значениях прогиба она связана с ним следующим соотношением

$$E I_z \frac{d^4 v}{dx^4} = \bar{q}, \quad (2.18)$$

где  $E$  – модуль упругости I-го рода;

$I_z$  – момент инерции сечения стержня относительно оси  $z$  (вообще потеря устойчивости стержня происходит в плоскости его минимальной жесткости, т.е. стержень изгибается вокруг оси, относительно которой момент инерции его поперечного сечения минимален, поэтому при исследовании устойчивости стержней следует сначала определить, относительно какой оси момент инерции сечения будет минимальным, и именно его использовать в расчетах, соответствующим образом выбрав систему координат).

Из выражений (2.17) и (2.18) вытекает следующее уравнение

$$E I_z \frac{d^4 v}{dx^4} + N \frac{d^2 v}{dx^2} = 0. \quad (2.19)$$

Введем обозначение  $\frac{N}{E I_z} = k^2$ . Тогда уравнение (2.19) примет вид

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = 0. \quad (2.20)$$

Продольная ось стержня в искривленном состоянии близка по форме к полуволне синусоиды. Поэтому общее решение уравнения (2.20) можно представить в виде

$$v(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sin kx + C_4 \cos kx. \quad (2.21)$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов  $C_i$  используем граничные условия, учитывая шарнирное закрепление стержня.

При  $x = 0$  и  $x = l$  прогиба стержня нет, поэтому  $v(0) = v(l) = 0$ . Кроме того, изгибающий момент  $M_z$  в шарнире также равен нулю. Из дисциплины «Сопротивление материалов» известно соотношение  $M_z = E I_z \frac{d^2 v}{dx^2}$ .

$$\text{Следовательно, } \frac{d^2 v(0)}{dx^2} = \frac{d^2 v(l)}{dx^2} = 0.$$

Продифференцируем два раза выражение (2.21):

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= C_2 + k C_3 \cos kx - k C_4 \sin kx, \\ \frac{d^2 v}{dx^2} &= -k^2 C_3 \sin kx - k^2 C_4 \cos kx. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Из уравнений (2.21) и (2.22) составим следующую систему уравнений при  $x=0$

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_2 \cdot 0 + C_3 \sin k \cdot 0 + C_4 \cos k \cdot 0 &= 0; \\ -C_3 \sin k \cdot 0 - C_4 \cos k \cdot 0 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Или после сокращения

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_4 &= 0; \\ C_4 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Откуда получим  $C_1 = C_4 = 0$ .

При  $x=l$

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_2 \cdot l + C_3 \sin kl + C_4 \cos kl &= 0; \\ -C_3 \sin kl - C_4 \cos kl &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Учитывая, что  $C_1 = C_4 = 0$ , получим

$$\left. \begin{aligned} C_2 \cdot l + C_3 \sin kl &= 0; \\ C_3 \sin kl &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Откуда следует, что  $C_2 \cdot l = 0$ . Поскольку  $l \neq 0$ , то  $C_2 = 0$ . Тогда будем иметь

$$\left. \begin{aligned} C_1 = C_2 = C_4 &= 0; \\ C_3 \sin kl &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Если принять  $C_3 = 0$ , то учитывая, что  $C_1 = C_2 = C_4 = 0$ , из уравнения (2.21) получим  $v(x) = 0$ , т.е. продольная ось стержня должна быть прямолинейной. Но нас интересует искривленная форма равновесия. Тогда, если  $C_3 \neq 0$ , то должно выполняться равенство

$$\sin kl = 0. \quad (2.23)$$

Это возможно, если  $kl = n\pi$ , где  $n$  – любое целое число. Учитывая, что  $k^2 = \frac{N}{E I_z}$ , получим

$$N_n = \frac{n^2 \pi^2 E I_z}{l^2}, \quad (2.24)$$

где  $N_n$  – совокупность значений силы  $N$ , при которых возможна искривленная форма равновесия.

В соответствии с данным выше определением критической нагрузки нужно выбрать наименьшую из  $N_n$ . Ее, очевидно, можно получить, если в формуле (2.24) принять  $n=1$ . Таким образом, мы получим формулу Эйлера для определения критической сжимающей нагрузки шарнирно закрепленного стержня

$$N_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E I_z}{l^2}. \quad (2.25)$$

Перейдем от силы к напряжениям

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{N_{\text{кр}}}{F} = \frac{\pi^2 E I_z}{l^2 F} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{i}\right)^2}, \quad (2.25)$$

где  $F$  – площадь поперечного сечения стержня;

$i = \sqrt{\frac{I_z}{F}}$  – радиус инерции поперечного сечения стержня.

При  $n=1$  имеем  $kl = \pi$ , тогда уравнение упругой линии (2.21) с учетом того, что  $C_1 = C_2 = C_4 = 0$ , принимает вид

$$v(x) = C_3 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (2.26)$$

Таким образом, стержень при потере устойчивости изгибается по полуволне синусоиды с максимальным прогибом  $C_3$ . При любом целочисленном значении  $n$  уравнение упругой линии имеет вид

$$v(x) = C_3 \sin \frac{n \pi x}{l}. \quad (2.27)$$

Упругая линия при этом будет представлена кривой в виде  $n$  полуволн (рис. 2.4).

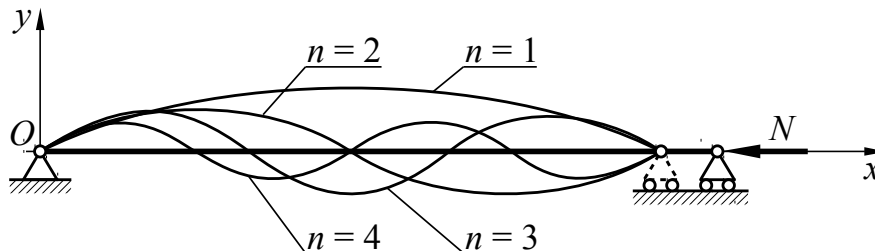


Рис. 2.4. Формы равновесия стержня при потере устойчивости

Однако формы равновесия при  $n > 1$  неустойчивы и существуют непродолжительное время.

В выражении для упругой линии (2.26) осталась неопределенной постоянная  $C_3$ , т.е. величину прогиба при принятом допущении о его малости мы узнать не можем. Для описания закритического поведения стержня при больших прогибах необходимо вместо линеаризованного уравнения (2.19) использовать полное нелинейное уравнение равновесия, вывод которого приводится в дисциплине «Сопротивление материалов»

$$\frac{E I_z \frac{d^2 v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} + N v = 0. \quad (2.28)$$

Однако закритическое поведение стержня не представляет большого практического интереса и далее рассматриваться не будет.

Теперь рассмотрим энергетический подход к определению критической нагрузки.

Из дисциплины «Сопротивление материалов» известно, что потенциальная энергия деформации стержня при изгибе определяется работой изгибающего момента  $M_z$  на взаимном угловом перемещении  $d\theta$  двух сечений

$$dU = \frac{1}{2} M_z d\theta. \quad (2.29)$$

Известно также, что

$$d\theta = \frac{dx}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z} dx, \quad (2.30)$$

где  $\rho$  – радиус кривизны нейтральной линии стержня при изгибе.

Откуда потенциальная энергия деформации стержня при изгибе будет равна

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M_z^2}{EI_z} dx. \quad (2.31)$$

Учитывая, что  $M_z = EI_z \frac{d^2 v}{dx^2}$ , формулу (2.31) можно переписать в виде

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI_z \left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)^2 dx. \quad (2.32)$$

Работа  $A$  внешних сил  $N$  совершается на перемещении конца стержня  $\Delta$  (рис. 2.5)

$$A = N \Delta. \quad (2.33)$$

В формуле (2.33) множитель  $\frac{1}{2}$  отсутствует, т.к. величина силы  $N$  при перемещении на расстояние  $\Delta$  не изменяется.



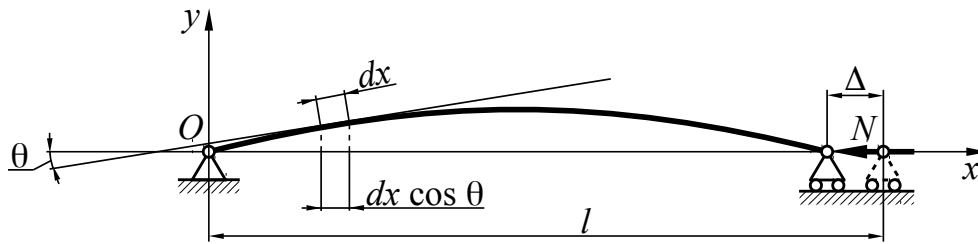


Рис. 2.5. К энергетическому методу определения критической нагрузки

Перемещение  $\Delta$  можно найти как разность между длиной  $l$  и проекцией упругой линии на ось  $x$ . При этом очевидно, что

$$d\Delta = dx - dx \cos \theta. \quad (2.34)$$

Известно, что  $\cos \theta$  можно представить в виде степенного ряда

$$\cos \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n}. \quad (2.35)$$

Ограничиваясь первыми двумя членами этого ряда, запишем

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}. \quad (2.36)$$

Тогда формулу (2.34) можно переписать в виде

$$d\Delta \approx \frac{\theta^2}{2} dx. \quad (2.37)$$

При малых прогибах  $\theta = \frac{dv}{dx}$ . Поэтому

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx. \quad (2.38)$$

Из условия (2.12) равенства потенциальной энергии деформации и работы внешних сил получим формулу для определения критической нагрузки

$$N_{\text{кр}} = \frac{\int_0^l EI_z \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_0^l \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx}. \quad (2.39)$$

Критическую нагрузку  $N_{\text{кр}}$  легко найти по формуле (2.39), если известно уравнение упругой линии. Например, если стержень закреплен шарнирно, то уравнение упругой линии будет иметь вид  $v(x) = C \sin \frac{\pi x}{l}$  (формула (2.26)).

Если же точное уравнение упругой линии заранее не известно, то функция  $v(x)$  может быть задана приближенно.

## 2.3. Устойчивость прямоугольных пластин

### 2.3.1. Основные положения

Плоские панели широко используются в конструкции летательных аппаратов (например, стенки лонжеронов, нервюр, обшивка крыла при небольшой ее кривизне). Они работают в условиях плоского напряженного состояния и при восприятии сжимающих нормальных и касательных напряжений могут терять устойчивость. В качестве модели плоской панели можно использовать плоскую прямоугольную пластину.

При решении задачи о потере устойчивости пластины кроме допущений, принятых в теории изгиба, предполагают, что до потери устойчивости пластина является плоской, все силы, действующие на пластину, действуют по срединной поверхности и при деформациях пластины не изменяются ни по величине, ни по направлению.

Таким образом, докритическое напряженное состояние пластины является плоским и описывается выведенными в части I настоящего учебного пособия уравнениями:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0; \quad (2.40)$$

$$N_x = B(\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y); \quad N_y = B(\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x); \quad N_{xy} = \frac{B(1-\mu)}{2} \gamma_{xy}, \quad (2.41)$$

где  $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ;  $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ ;  $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ ;

$$B = \frac{Eh}{1-\mu^2}.$$

Здесь  $N_x$ ,  $N_y$  – докритические сжимающие усилия,  $N_{xy}$  – докритическое сдвигающее усилие, а  $u$  и  $v$  – докритические перемещения, которые считаются малыми и не влияющими на размеры пластины.

Наиболее распространенным случаем нагружения пластин является воздействие усилий, равномерно распределенных по краям пластины, т.е.  $N_x = \text{const}$ ,  $N_y = \text{const}$ ,  $N_{xy} = \text{const}$  (рис. 2.6). В этом случае докритические усилия, действующие в пластине, можно считать известными и равными внешним усилиям  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$ , действующим по сторонам пластины.

Придадим теперь пластине малый прогиб  $w(x, y)$  в направлении оси  $z$  и рассмотрим ее равновесие. Для этого воспользуемся полученным в части I настоящего учебного пособия уравнением изгиба пластины

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D}, \quad (2.42)$$

где  $q(x, y)$  – поперечная распределенная по поверхности пластины нагрузка;

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$  – цилиндрическая жесткость.

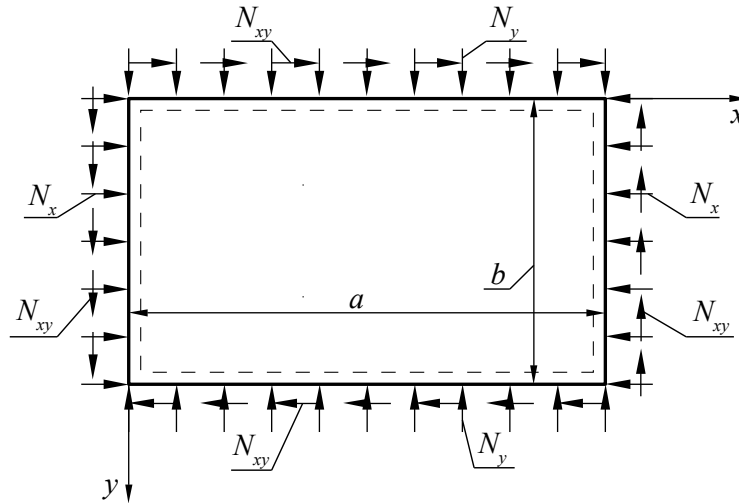


Рис. 2.6. Напряжение пластины сжатием и сдвигом

В качестве  $q(x, y)$  возьмем условную эквивалентную поперечную нагрузку  $\bar{q}(x, y)$ , которой заменим докритические усилия, т.е. используем прием, который был применен выше при рассмотрении устойчивости стержня. Для этого найдем и сложим вертикальные проекции действующих на пластину сжимающих и сдвигающих усилий (рис. 2.7).

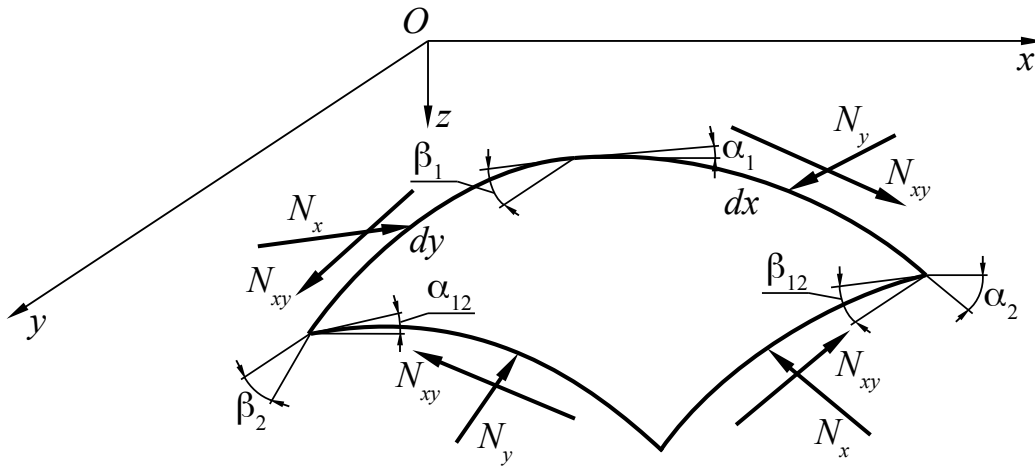


Рис. 2.7. Элемент срединной поверхности изогнутой пластины, нагруженный сжатием и сдвигом

В результате получим следующее уравнение равновесия

$$\begin{aligned} \bar{q} dx dy = & (N_x \sin \alpha_1 - N_x \sin \alpha_2) dy + (N_y \sin \beta_1 - N_y \sin \beta_2) dx + \\ & + (N_{xy} \sin \alpha_1 - N_{xy} \sin \alpha_{12}) dx + (N_{xy} \sin \beta_1 - N_{xy} \sin \beta_{12}) dy. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Для малых прогибов справедливо  $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$ ,  $\sin \beta \approx \operatorname{tg} \beta \approx \beta$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &\approx \frac{\partial w}{\partial x}, \alpha_2 \approx \alpha_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} dx, \\ \beta_1 &\approx \frac{\partial w}{\partial y}, \beta_2 \approx \beta_1 + \frac{\partial \beta_1}{\partial y} dy, \\ \alpha_{12} &\approx \alpha_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} dy, \beta_{12} \approx \beta_1 + \frac{\partial \beta_1}{\partial x} dx. \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

После приведения подобных членов и деления на элементарную площадь  $dxdy$  получим

$$\bar{q} = -N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (2.45)$$

Подставим  $\bar{q}$  из (2.45) в уравнение (2.42) вместо  $q$  и получим уравнение устойчивости пластины

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (2.46)$$

где  $\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$ .

Теперь выведем соотношения для потенциальной энергии деформации пластины и работы докритических усилий.

Выражение для потенциальной энергии деформации изогнутой пластины было получено в части I настоящего учебного пособия

$$U = -\frac{1}{2} \iint \left( M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dxdy. \quad (2.47)$$

Используем следующие выражения для моментов, также полученные в части I настоящего учебного пособия:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \quad M_{xy} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (2.48)$$

Окончательно запишем

$$U = \frac{1}{2} \iint D \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dxdy. \quad (2.49)$$

Работа докритических усилий записывается по аналогии с работой внешних сил, которая была определена при исследовании устойчивости стержня (формулы (2.33) и (2.38))

$$A = \frac{1}{2} \iint \left[ N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + N_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy. \quad (2.50)$$

### 2.3.2. Устойчивость прямоугольной пластины, сжатой вдоль одной оси

Рассмотрим прямоугольную шарнирно закрепленную по контуру (по всем сторонам) пластину, сжатую вдоль оси  $x$  (рис. 2.8). Уравнение устойчивости (2.46) в данном случае примет вид

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (2.51)$$

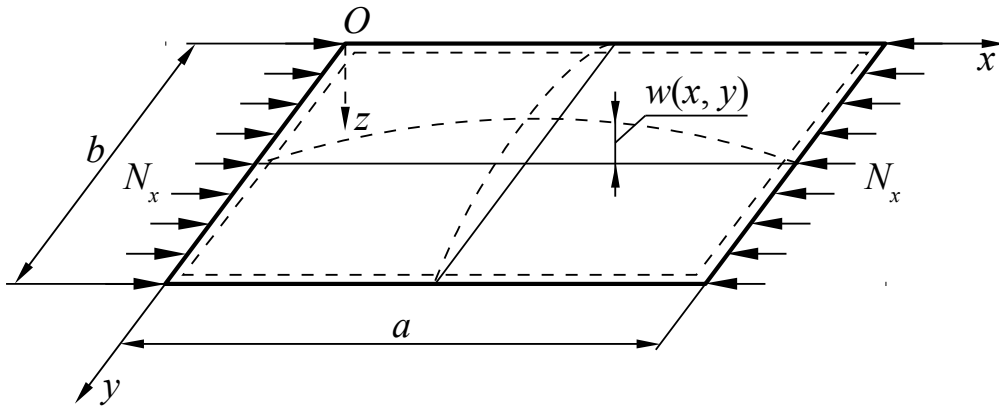


Рис. 2.8. Шарнирно закрепленная по контуру пластина, сжатая вдоль одной оси

Решение уравнения (2.51) должно удовлетворять граничным условиям, соответствующим шарнирному закреплению пластины по контуру:

- при  $x=0$  и  $x=a$ :  $w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$ ;
- при  $y=0$  и  $y=b$ :  $w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ .

Будем искать решение уравнения (2.51) в форме двойного тригонометрического ряда

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (2.52)$$

Подставив (2.52) в (2.51), получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left[ D \pi^4 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{\pi^2 m^2}{a^2} N_x \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0. \quad (2.53)$$

При  $A_{mn} = 0$  мы получим исходную плоскую форму пластины. Поэтому нас будет интересовать только случай, когда  $A_{mn} \neq 0$ . При этом равенство (2.53) возможно, если выражение, стоящее в квадратных скобках, равно нулю. Поделив это выражение на  $\pi^4$ , получим

$$D \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{m^2}{\pi^2 a^2} N_x = 0. \quad (2.54)$$

Отсюда получим

$$N_x = \frac{\pi^2 a^2 D}{m^2} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2. \quad (2.55)$$

Критическое значение нагрузки  $N_{кр}$  будет соответствовать наименьшему значению  $N_x$ , полученному из формулы (2.55). Для этого нужно принять  $n=1$ , тогда

$$N_{кр} = \frac{\pi^2 a^2 D}{m^2} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \quad (2.56)$$

или

$$N_{кр} = k_{\sigma} \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad (2.57)$$

где  $k_{\sigma} = \left( \frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2$  – коэффициент устойчивости при сжатии, который зависит от соотношения сторон пластины ( $a$  и  $b$ ) и ее формы при потере устойчивости, которая определяется числом  $m$  – числом полуволен.

Перейдем от распределенной нагрузки к напряжениям. В части I настоящего учебного пособия было указано, что нормальные напряжения и нормальные (или осевые) усилия для пластины при плоском напряженном состоянии связаны соотношением  $\sigma = \frac{N}{h}$ , где  $h$  – толщина пластины. Учитывая выражение

для цилиндрической жесткости  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ , получим формулу для критических нормальных напряжений

потери устойчивости пластины при сжатии вдоль одной оси

$$\sigma_{кр} = k_{\sigma} \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left( \frac{h}{b} \right)^2. \quad (2.58)$$

Из формулы (2.58) видно, что критические напряжения зависят от материала пластины (определяет значения  $E$  и  $\mu$ ), от геометрических параметров пластины (длина  $a$  – определяет величину коэффициента устойчивости  $k_{\sigma}$ , ширина  $b$ , толщина  $h$ ), от числа полуволен  $m$  (определяет величину коэффициента устойчивости  $k_{\sigma}$ ), от условий закрепления пластины.

На рис. 2.9 показана зависимость коэффициента устойчивости при сжатии  $k_{\sigma}$  от соотношения сторон пластины и числа полуволен  $m$ .

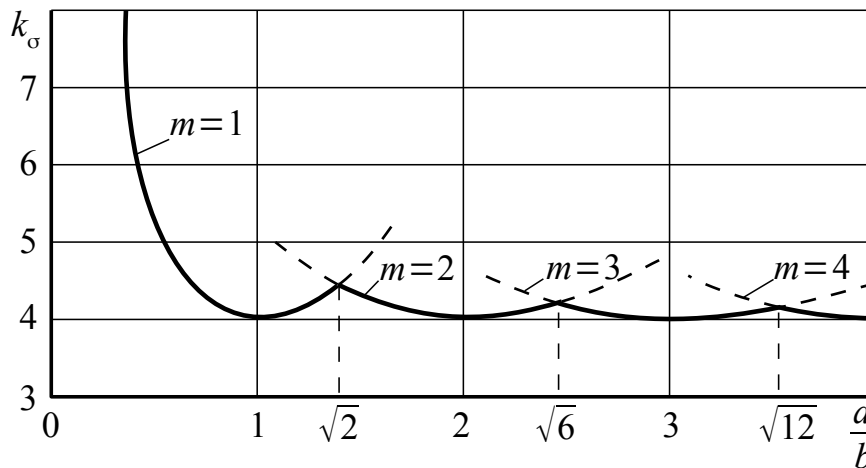


Рис. 2.9. Зависимость коэффициента устойчивости при сжатии от соотношения сторон пластины и числа полуволн

Каждое значение  $m$  дает отдельную кривую. Число  $m$  необходимо выбирать таким, при котором  $k_\sigma$ , а значит и  $\sigma_{кр}$  будут наименьшими (кривая на рис. 2.9, показанная сплошной линией).

Условия закрепления пластины могут отличаться от шарнирного. Это могут быть и защемленные, и свободные края. Условия закрепления оказывают влияние на коэффициент устойчивости  $k_\sigma$ , величину которого можно определить по графикам, приведенным на рис. 2.10.

Следует учитывать, что формула (2.58), по которой вычисляются критические нормальные напряжения, справедлива только для упругой зоны работы материала. Поэтому необходимо сравнить полученные критические напряжения  $\sigma_{кр}$  с пределом пропорциональности  $\sigma_{пл}$ . Если получилось, что  $\sigma_{кр} > \sigma_{пл}$ , то критические напряжения необходимо пересчитать по эмпирической формуле

$$\sigma_{кр}^* = \sigma_v \frac{1 + \psi}{1 + \psi + \psi^2}, \quad (2.59)$$

где  $\psi = \frac{\sigma_v}{\sigma_{кр}}$ .

### 2.3.3. Устойчивость прямоугольной пластины при сдвиге

В тонкостенных конструкциях летательных аппаратов при действии значительных сдвигающих усилий, вызываемых поперечной силой или крутящим моментом, возможна потеря устойчивости, сопровождаемая образованием деформации в виде системы косых волн. Если пластина закреплена по контуру, то деформация имеет вид чередующихся выпуклостей и впадин (рис. 2.11).

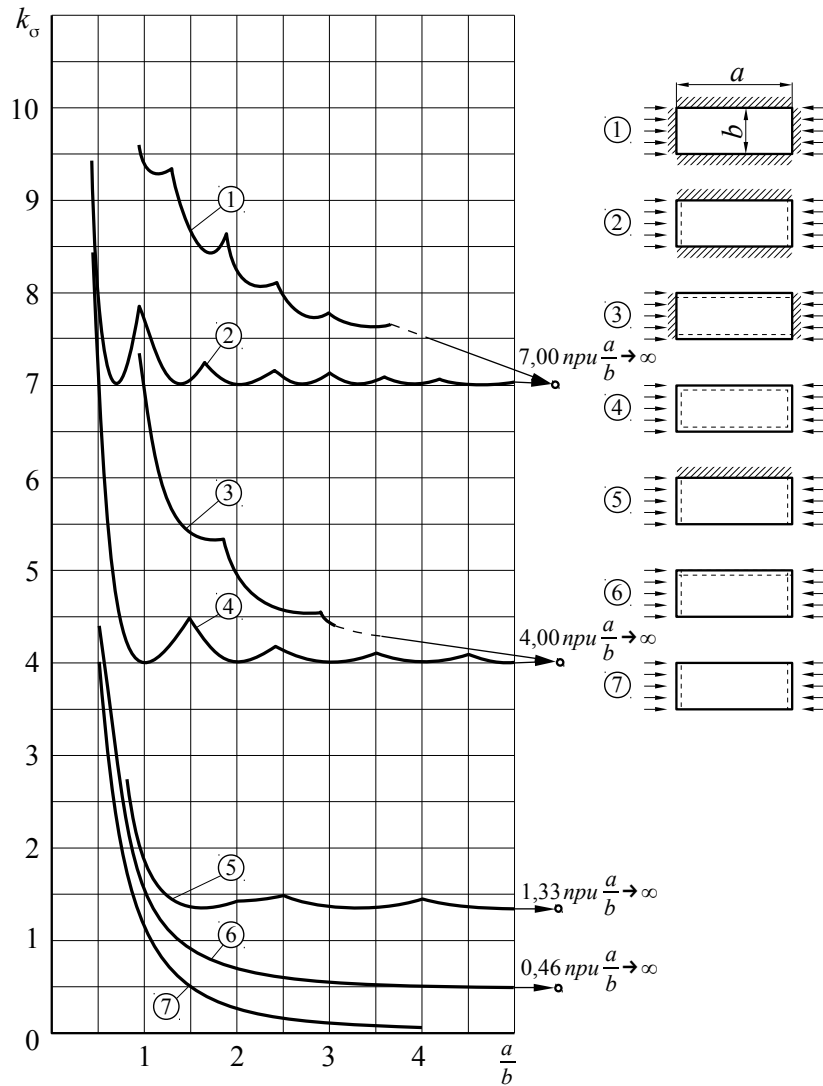


Рис. 2.10. Зависимость коэффициента устойчивости при сжатии от соотношения сторон пластины и условий закрепления

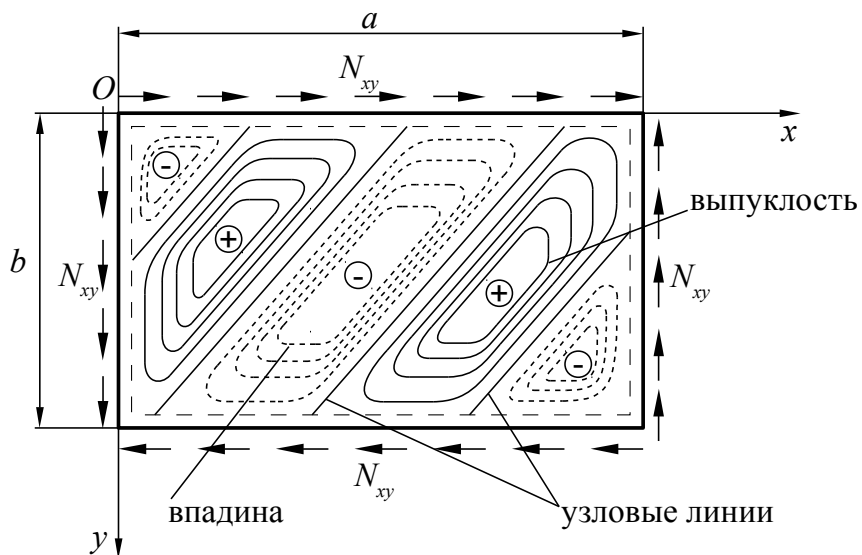


Рис. 2.11. Форма потери устойчивости пластины при сдвиге



Уравнение устойчивости (2.46) в данном случае примет вид

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \quad (2.60)$$

Точное решение этого уравнения сопряжено с большими трудностями. Поэтому найдем приближенное решение, справедливое для пластин с большим удлинением ( $a \gg b$ ), шарнирно закрепленных по контуру (рис. 2.12).

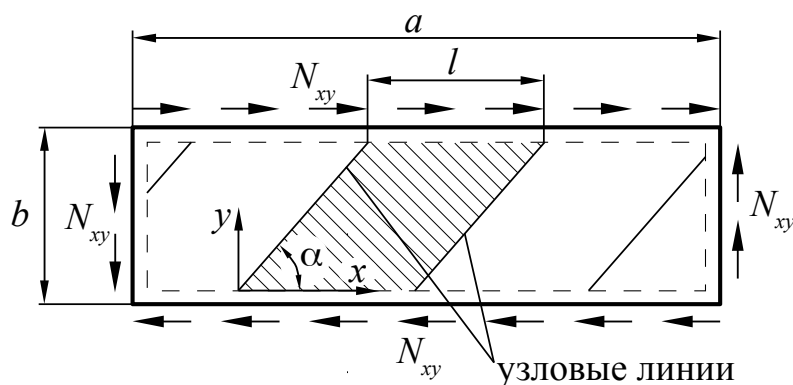


Рис. 2.12. Прямоугольная пластина большого удлинения, нагруженная сдвигающими усилиями

Зададим прогиб в следующей форме, аппроксимирующей систему косых волн

$$w = C \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi}{l} (x - ky), \quad (2.61)$$

где  $l$  – шаг узловых линий;

$k = \text{ctg } \alpha$ ;

$\alpha$  – угол наклона узловых линий к оси  $x$ .

Это уравнение удовлетворяет граничному условию по равенству нулю прогиба только на длинных сторонах пластины, т.е. при  $y=0$  и  $y=b$ . На коротких сторонах пластины это граничное условие не выполняется, что, однако, не очень существенно для длинных пластин.

Важно, что уравнение (2.61) обращает в нуль прогибы на узловых линиях, задаваемых уравнением  $y = \frac{1}{k} x$  или  $x - ky = 0$ .

Найдем потенциальную энергию деформации  $U$  и работу докритических сил  $A$  по формулам (2.49) и (2.50) соответственно. Произведем интегрирование по параллелограмму, заштрихованному на рис. 2.12, т.е. по  $x$  от  $ky$  до  $ky + l$ , а по  $y$  – от 0 до  $b$

$$U = \frac{\pi^4 C^2 D}{8 b l} \left[ 6 k^2 + 2 + \left( \frac{l}{b} \right)^2 + \left( \frac{b}{l} \right)^2 (1 + k^2)^2 \right], \quad (2.62)$$

$$A = N_{xy} \frac{\pi^2 C^2 k b}{4 l}. \quad (2.63)$$

Из условия  $A=U$ , а также с учетом того, что  $\tau_{xy} = \frac{N_{xy}}{h}$ , получим формулу для критических касательных напряжений потери устойчивости при сдвиге

$$\tau_{кр} = k_{\tau} \frac{\pi^2 D}{b^2 h}. \quad (2.64)$$

где  $k_{\tau} = \frac{1}{2k} \left[ 6k^2 + 2 + \bar{l}^2 + \frac{1}{\bar{l}^2} (1+k^2)^2 \right]$  – коэффициент устойчивости при сдвиге;

$\bar{l} = \frac{l}{b}$  – относительный шаг узловых линий.

Эту формулу можно также переписать следующим образом, учитывая, что  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$

$$\tau_{кр} = k_{\tau} \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left( \frac{h}{b} \right)^2. \quad (2.65)$$

Из формулы (2.65) видно, что критические напряжения потери устойчивости пластины при сдвиге зависят от материала пластины (определяет значения  $E$  и  $\mu$ ), от геометрических параметров пластины (ширина  $b$ , толщина  $h$ ), от коэффициента устойчивости  $k_{\tau}$ , который в свою очередь зависит от соотношения сторон пластины ( $a$  и  $b$ ) и от условий ее закрепления.

Нас, естественно, будет интересовать наименьшее значение коэффициента  $k_{\tau}$ . В рассматриваемом случае для прямоугольной пластины большого удлинения он зависит от параметров  $\bar{l}$  и  $k$ . Минимизируем  $k_{\tau}$ , последовательно используя условия  $\frac{\partial k_{\tau}}{\partial \bar{l}} = 0$  и  $\frac{\partial k_{\tau}}{\partial k} = 0$ . Откуда найдем  $\bar{l}^2 = 1 + k^2$ ,  $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\alpha = \text{arcctg } k \approx 54^{\circ} 44'$ ,  $\bar{l} \approx 1,22$ ,  $k_{\tau} = 4\sqrt{2} \approx 5,66$ . Таким образом, получим приближенную формулу для критических касательных напряжений потери устойчивости пластины большого удлинения при сдвиге

$$\tau_{кр} = 5,66 \frac{\pi^2 D}{b^2 h}. \quad (2.66)$$

При небольшом различии сторон  $a$  и  $b$  пластины вывод формулы для критических касательных напряжений потери устойчивости достаточно сложен. Поэтому здесь мы его приводить не будем, тем более что итоговая формула имеет тот же вид, что и (2.65). Отличие заключается лишь в выражении для коэффициента устойчивости при сдвиге  $k_{\tau}$ . В этом случае оно имеет вид

$$k_{\tau} = 5,34 + 4 \left( \frac{b}{a} \right)^2, \quad (2.67)$$

где  $a \geq b$ .

Если рассматривать другие граничные условия (условия закрепления пластины), то формулы для критических касательных напряжений потери устойчивости при сдвиге также будут отличаться друг от друга только значением коэффициента  $k_{\tau}$ . На рис. 2.13 показана зависимость коэффициента устойчивости при сдвиге от соотношения сторон пластины и условий ее закрепления.

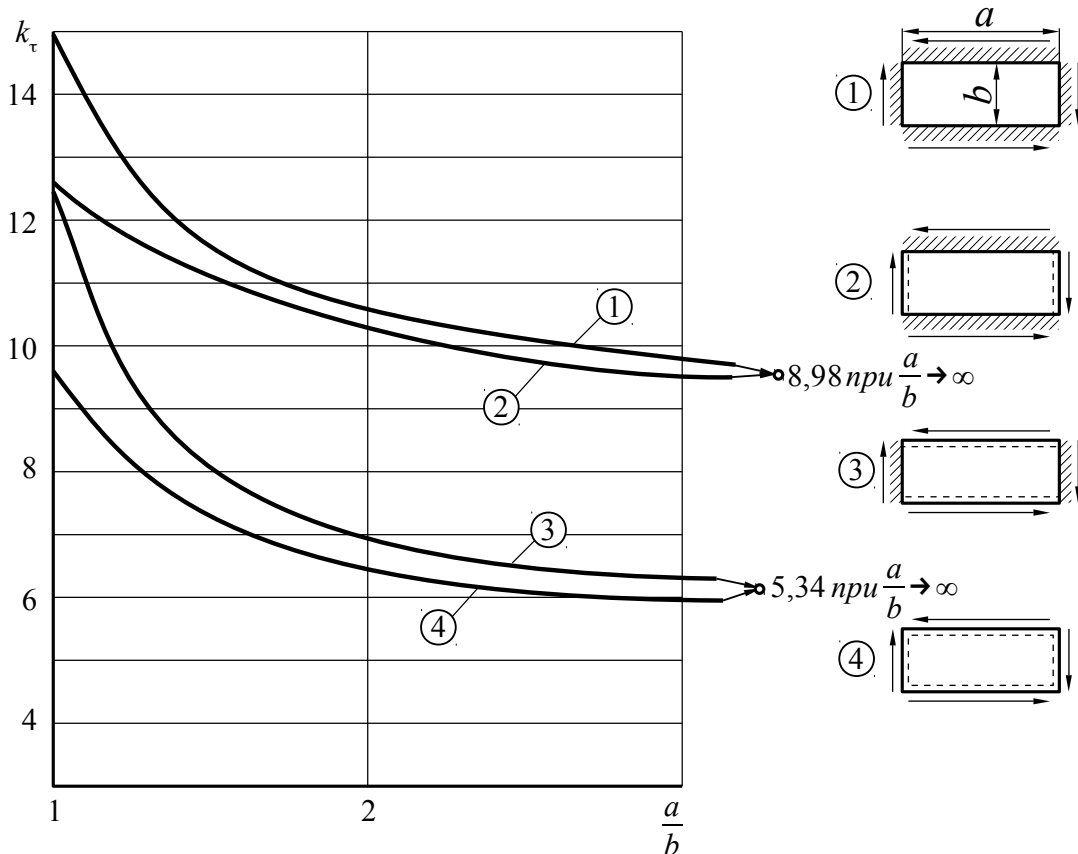


Рис. 2.13. Зависимость коэффициента устойчивости при сдвиге от соотношения сторон пластины и условий закрепления

Здесь так же как и при расчете критических нормальных напряжений в случае, если критические касательные напряжения, рассчитанные по формулам (2.64) – (2.66), больше предела пропорциональности ( $\tau_{кр} > \tau_{пл}$ ), необходимо использовать эмпирическую формулу пересчета, аналогичную (2.59)

$$\tau_{кр}^* = \tau_{в} \frac{1 + \vartheta}{1 + \vartheta + \vartheta^2}, \quad (2.68)$$

где  $\tau_{в} = (0,60 \dots 0,65) \sigma_{в}$  – для большинства конструкционных сплавов;  
 $\vartheta = \frac{\tau_{в}}{\tau_{кр}}$ .

### 2.3.4. Устойчивость прямоугольной пластины при комбинированном нагружении

#### Устойчивость прямоугольной пластины при сжатии вдоль двух осей

Рассмотрим случай сжатия вдоль двух осей прямоугольной шарнирно закрепленной по контуру пластины (рис. 2.14).

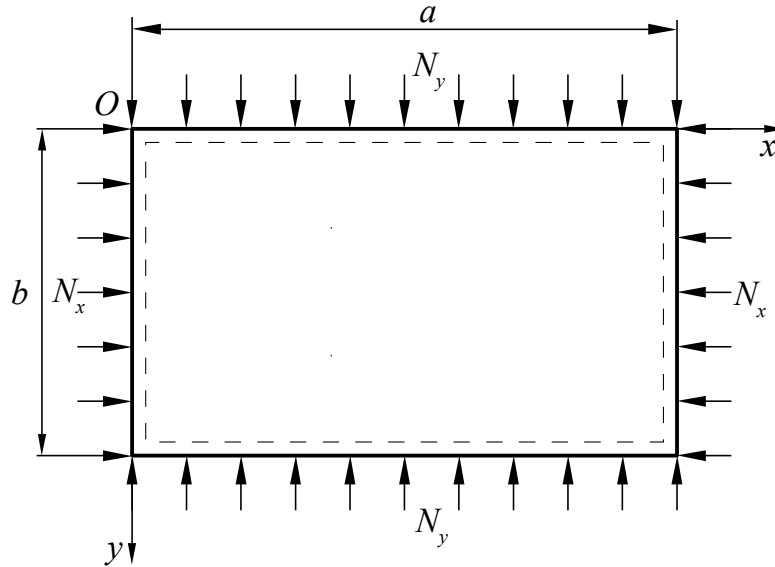


Рис. 2.14. Шарнирно закрепленная по контуру пластина, сжатая вдоль двух осей

Уравнение устойчивости (2.46) в данном случае примет вид

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + \overline{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \overline{N}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (2.69)$$

где верхняя черта над усилиями означает, что они действуют совместно.

Здесь мы можем использовать тот же прием, что и при решении задачи об одноосном сжатии пластины, т.е. зададим прогиб в форме двойного тригонометрического ряда  $w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$  и, подставив его в уравнение устойчивости (2.69), получим

$$D \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{m^2}{\pi^2 a^2} \overline{N}_x - \frac{n^2}{\pi^2 b^2} \overline{N}_y = 0. \quad (2.70)$$

Пусть  $\overline{N}_x \geq \overline{N}_y$ , тогда можно записать  $\overline{N}_y = \varphi \overline{N}_x$ , где  $\varphi$  – коэффициент пропорциональности, причем  $\varphi \leq 1$ . Следовательно из уравнения (2.70) мы можем получить следующую формулу для критического усилия

$$\bar{N}_{\text{кр}} = k \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad (2.71)$$

где

$$k = \frac{\left(m^2 \frac{b^2}{a^2} + n^2\right)^2}{m^2 \frac{b^2}{a^2} + \varphi n^2}. \quad (2.72)$$

При заданной величине  $\varphi$  в результате перебора различных значений  $m$  и  $n$  можно найти наименьшее значение  $k$ , при подстановке которого в формулу (2.71) получим выражение для расчета критического усилия.

Для примера рассмотрим квадратную пластину ( $a = b$ ). В этом случае

$$k = \frac{(m^2 + n^2)^2}{m^2 + \varphi n^2}. \quad (2.73)$$

При  $\varphi \leq 1$  минимальное значение  $k$  достигается, когда  $m = n = 1$ . При этом

$$k = \frac{4}{1 + \varphi}. \quad (2.74)$$

Выразим  $k$  из уравнения (2.71) и подставим в уравнение (2.74). В то же уравнение (2.74) подставим  $\varphi = \frac{\bar{N}_{y \text{кр}}}{\bar{N}_{x \text{кр}}}$ . Учитывая, что при раздельном действии усилий их критические значения для квадратной пластины  $\left(\frac{a}{b} = 1\right)$  будут определяться следующим выражением (формула (2.57), рис. 2.9)

$$N_{x \text{кр}} = N_{y \text{кр}} = 4 \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad (2.75)$$

и проведя ряд несложных преобразований, окончательно получим

$$\frac{\bar{N}_{x \text{кр}}}{N_{x \text{кр}}} + \frac{\bar{N}_{y \text{кр}}}{N_{y \text{кр}}} = 1. \quad (2.76)$$

Для наглядности можно построить график, показанный на рис. 2.15. Здесь прямая, соединяющая точки  $(0; N_{y \text{кр}})$  и  $(N_{x \text{кр}}; 0)$ , разделяет область возможных комбинаций усилий  $\bar{N}_x$  и  $\bar{N}_y$  на две части. Комбинации этих усилий, лежащие в области *I*, не вызывают потери устойчивости пластины. Сама прямая соответствует критическому состоянию, а область *II* является областью неустойчивости.

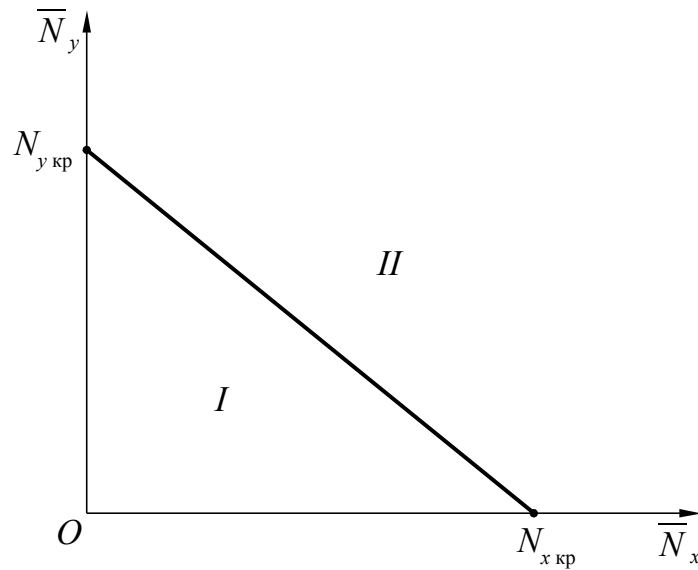


Рис. 2.15. Области устойчивости *I* и неустойчивости *II* пластины, сжатой вдоль двух осей

### Устойчивость прямоугольной пластины при совместном сжатии и сдвиге

Рассмотрим случай сжатия и сдвига прямоугольной шарнирно закрепленной по контуру пластины (рис. 2.16).

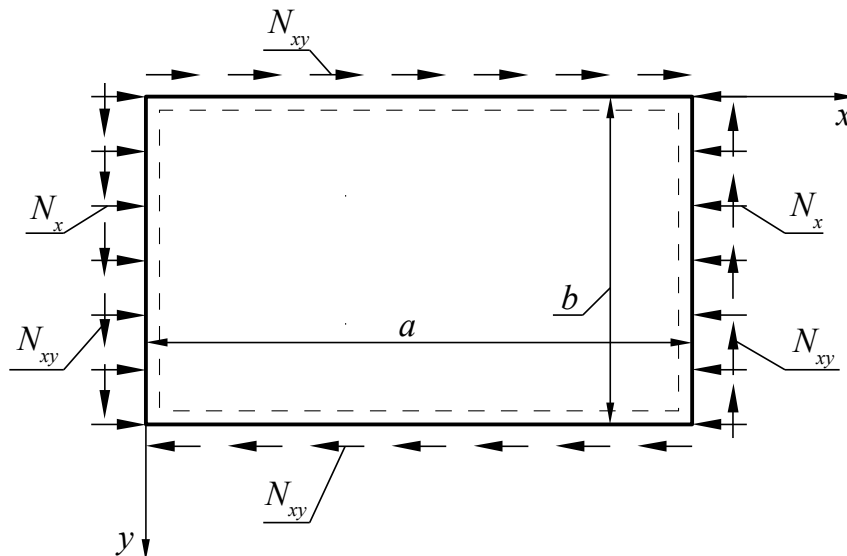


Рис. 2.16. Шарнирно закрепленная по контуру пластина, нагруженная сжатием и сдвигом

Зададим прогиб в той же форме, что и при рассмотрении потери устойчивости пластины от действия только сдвигающих усилий  $w = C \sin \frac{\pi y}{b} \sin \frac{\pi}{l} (x - ky)$  (формула (2.61)). Повторяя вывод формулы (2.64) для критических касательных напряжений потери устойчивости при сдвиге, получим следующее соотношение

$$\bar{N}_{x \text{ кр}} + 2k \bar{N}_{xy \text{ кр}} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left[ 6k^2 + 2 + \bar{l}^2 + \frac{1}{\bar{l}^2} (1+k^2)^2 \right]. \quad (2.77)$$

Как было показано выше, минимальное значение правой части уравнения (2.77) реализуется при  $\bar{l}^2 = 1+k^2$ . Откуда получим

$$\bar{N}_{x \text{ кр}} + 2k \bar{N}_{xy \text{ кр}} = 4 \frac{\pi^2 D}{b^2} (1+2k^2). \quad (2.78)$$

В соответствии с полученными выше результатами критические значения отдельно действующих усилий равны

$$N_{x \text{ кр}} = 4 \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad N_{xy \text{ кр}} = 4\sqrt{2} \frac{\pi^2 D}{b^2}. \quad (2.79)$$

Преобразуем (2.78) с учетом (2.79)

$$\frac{\bar{N}_{x \text{ кр}}}{N_{x \text{ кр}}} + 2k \sqrt{2} \frac{\bar{N}_{xy \text{ кр}}}{N_{xy \text{ кр}}} = 1 + 2k^2. \quad (2.80)$$

Найдем  $k$  из условия минимума сжимающих усилий, т.е. при  $\frac{\partial \bar{N}_{x \text{ кр}}}{\partial k} = 0$

$$k = \frac{\sqrt{2} \bar{N}_{xy \text{ кр}}}{2 N_{xy \text{ кр}}}. \quad (2.81)$$

Подставим это выражение для  $k$  в (2.80) и окончательно получим

$$\frac{\bar{N}_{x \text{ кр}}}{N_{x \text{ кр}}} + \left( \frac{\bar{N}_{xy \text{ кр}}}{N_{xy \text{ кр}}} \right)^2 = 1. \quad (2.82)$$

В графическом виде это соотношение представлено на рис. 2.17.

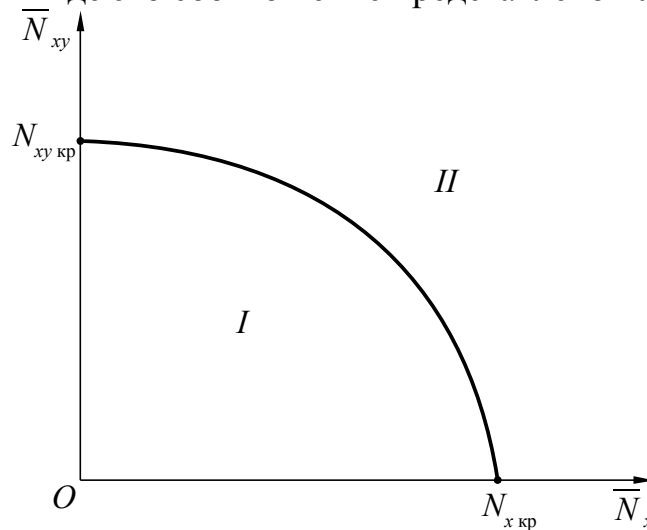


Рис. 2.17. Области устойчивости  $I$  и неустойчивости  $II$  пластины при совместном действии сжатия и сдвига

Здесь так же как и в предыдущем случае в области  $I$  лежат комбинации усилий, не вызывающие потери устойчивости пластины. Кривая, соединяющая точки  $(0; N_{xукр})$  и  $(N_{xкр}; 0)$ , соответствует критическому состоянию, а область  $II$  является областью неустойчивости.

### 3. Динамика конструкций летательных аппаратов

#### 3.1. Общие уравнения динамики упругих систем

##### 3.1.1. Расчетные схемы конструкций летательных аппаратов

Силовая конструкция летательного аппарата является упругодеформируемой и при динамическом нагружении может совершать колебания. Для упрощения теоретического анализа динамики сложных конструкций необходимо создать расчетные схемы и соответствующие им математические модели, достаточно адекватно описывающие рассматриваемые явления. Расчетная схема представляет собой некоторую модель конструкции, справедливую в определенных пределах и ориентированную на решение определенного класса задач.

При решении задач динамики и соответственно при построении расчетных схем упругодеформируемых конструкций используются континуальные, дискретные и дискретно-континуальные подходы, упомянутые в п. 1.7 части I настоящего учебного пособия.

Рассмотрим возможные варианты расчетной схемы для анализа поперечных колебаний тонкостенной конструкции типа крыла летательного аппарата. При континуальном подходе расчетная схема может быть выбрана в виде балки (рис. 3.1а), удовлетворяющей гипотезе плоских сечений.

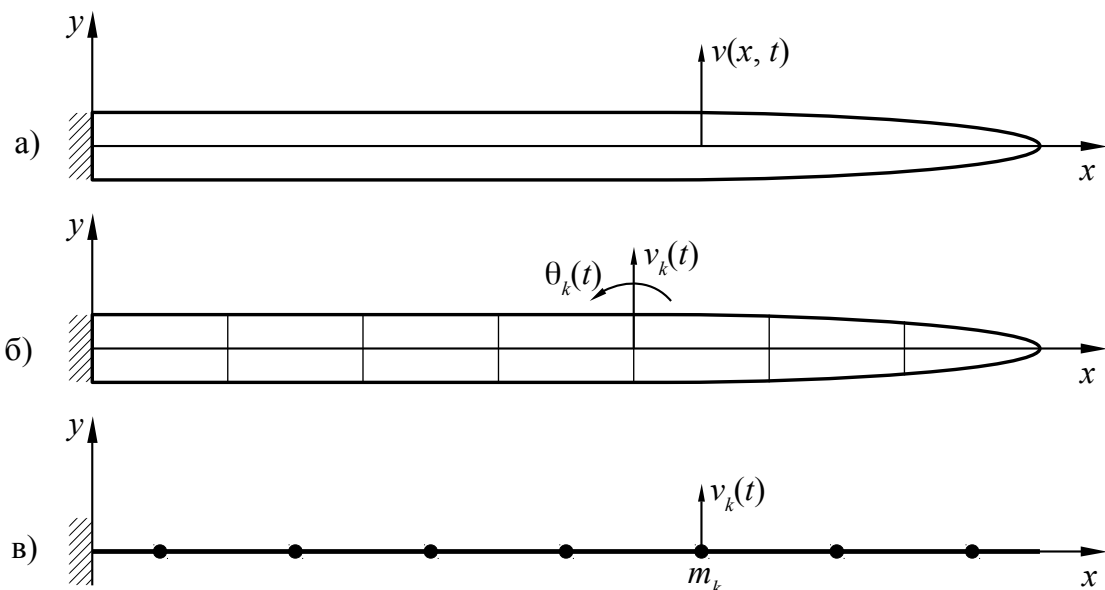


Рис. 3.1. Варианты расчетной схемы для анализа поперечных колебаний крыла



В этом случае поперечные перемещения точек балки при колебаниях можно описать функцией  $v = v(x, t)$ , где  $t$  – время. Масса конструкции при данном подходе считается непрерывно распределенной  $m_x = m(x)$ . Тогда рассматриваемая колебательная система имеет бесконечное число степеней свободы, а ее поперечные колебания описываются дифференциальным уравнением в частных производных.

При использовании дискретно-континуального подхода может быть построена более простая расчетная схема, обладающая конечным числом степеней свободы. Для этого крыло может быть разбито поперечными сечениями на конечное число отсеков (рис. 3.1б). В качестве неизвестных в данном случае рассматриваются поперечные перемещения  $v_k = v_k(t)$  и углы поворота отсеков  $\theta_k = \theta_k(t)$  в сечениях, разделяющих отсеки (где  $k$  – номер сечения). Через них выражаются перемещения  $v = v(x, t)$  в других точках отсеков. При этом часто для упрощения полагают, что жесткость и масса по длине отсека не изменяются.

При дискретном подходе крыло может быть заменено системой упругосвязанных сосредоточенных в узловых точках масс  $m_k$ , а в качестве неизвестных рассмотрены поперечные перемещения узловых точек  $v_k = v_k(t)$  (рис. 3.1в).

Обычно упругодеформируемые системы совершают малые колебания относительно положения равновесия. В этом случае в уравнениях колебаний можно пренебречь членами второго и более высокого порядка относительно координат, скоростей и ускорений, т.е. слагаемыми, в которые входят квадраты этих величин, их произведения и т.д. В этом случае уравнения колебаний будут линейными, а сами колебания и колебательные системы называются линейными. Ниже рассматриваются только линейные колебательные системы.

Будем считать также, что связи, наложенные на колебательную систему, являются стационарными и идеальными. Эти понятия подробно рассматриваются в дисциплине «Теоретическая механика». Напомним, что стационарными связями называются связи, не зависящие от времени. Идеальными связями механической системы, состоящей из  $N$  точек, называются связи, при которых сумма элементарных работ сил реакций связей равна нулю на любом возможном перемещении системы:

$$\sum_{k=1}^N \vec{R}_k \delta \vec{r}_k = 0, \quad (3.1)$$

где  $\vec{R}_k$  – сила реакции связи в  $k$ -й точке;  
 $\delta \vec{r}_k$  – возможное перемещение  $k$ -й точки.

### 3.1.2. Принцип Д'Аламбера–Лагранжа

Принцип Д'Аламбера–Лагранжа является обобщением вариационного принципа Лагранжа на задачи динамики.

В задачах статики, когда упругая система находится в состоянии равновесия, в соответствии с вариационным принципом Лагранжа, рассмотренным в части I настоящего учебного пособия, должно выполняться следующее условие

$$\delta U - \delta A = 0, \quad (3.2)$$

где  $\delta U$  – вариация потенциальной энергии системы;

$\delta A$  – вариация работы внешних сил.

В дисциплине «Теоретическая механика» для решения задач динамики используется принцип Д'Аламбера, в соответствии с которым движущееся с ускорением тело можно рассматривать как находящееся в состоянии равновесия, если учесть силы инерции. Этот принцип можно применить и для решения задач динамики упругих систем. В этом случае в уравнение (3.2) нужно добавить вариацию работы сил инерции  $\delta A_{\text{ин}}$

$$\delta U - \delta A - \delta A_{\text{ин}} = 0. \quad (3.3)$$

Это уравнение должно рассматриваться совместно с геометрическими граничными условиями. Из него могут быть получены дифференциальные уравнения динамики системы и статические граничные условия.

Для системы (упругого тела) с распределенной массой, находящейся под действием внешней распределенной по поверхности нагрузки  $\vec{p}$ , вариации работ внешних сил и сил инерции будут соответственно равны:

$$\delta A = \iint_S \vec{p} \delta \vec{r} dS; \quad (3.4)$$

$$\delta A_{\text{ин}} = - \iiint_V \rho \vec{r} \delta \vec{r} dV, \quad (3.5)$$

где  $\vec{r}$  – вектор перемещений точки тела;

$\vec{r} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$  – вектор ускорений точки тела;

$\rho$  – плотность тела;

$S$  – площадь поверхности тела;

$V$  – объем тела.

Для дискретной системы, состоящей из  $N$  сосредоточенных масс  $m_k$

$$\delta A = \sum_{k=1}^N \vec{P}_k \delta \vec{r}_k; \quad (3.6)$$

$$\delta A_{\text{ин}} = - \sum_{k=1}^N m_k \vec{r}_k \delta \vec{r}_k, \quad (3.7)$$

где  $\vec{P}_k$  – вектор внешней сосредоточенной нагрузки, приложенной к  $k$ -й массе;

$\vec{r}_k$  – вектор перемещений  $k$ -й массы, отсчитываемый от положения равновесия;

$$\vec{r}_k = \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} \text{ – вектор ускорений } k\text{-й массы.}$$

### 3.1.3. Уравнения Лагранжа второго рода

Рассмотрим систему, которая с учетом геометрических связей имеет  $s$  степеней свободы, т.е.  $s$  независимых между собой возможных перемещений, которые она может совершать. При этом перемещения системы выражаются через  $s$  обобщенных координат  $q_i(t)$ , где  $i = 1, 2, \dots, s$ . Обобщенные координаты являются скалярными функциями времени и могут быть линейными перемещениями или углами поворота в отдельных точках системы

$$\vec{r}_k(t) = \vec{r}_k(q_1(t), \dots, q_s(t)) \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (3.8)$$

или параметрами, характеризующими движения по любым заданным линейно независимым возможным перемещениям системы

$$\vec{r}(x, y, z, t) = \vec{r}(x, y, z, q_1(t), \dots, q_s(t)). \quad (3.9)$$

Из уравнения (3.3) с учетом независимости произвольных вариаций обобщенных координат  $\delta q_i$  могут быть получены известные из дисциплины «Теоретическая механика» уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (3.10)$$

где  $T$  – кинетическая энергия системы;

$U$  – потенциальная энергия системы;

$Q_i$  – обобщенная непотенциальная сила, соответствующая обобщенной координате  $q_i$ ;

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} \text{ – обобщенная скорость.}$$

Уравнения Лагранжа второго рода являются по существу правилами составления дифференциальных уравнений динамики системы в обобщенных координатах.

### 3.1.4. Уравнения колебаний упругой системы с конечным числом степеней свободы

Конечное число степеней свободы имеют расчетные схемы, построенные с использованием дискретно-континуального и дискретного подходов.

Рассмотрим малые колебания системы, имеющей  $s$  степеней свободы, относительно некоторого положения равновесия, отсчитывая от него обобщенные координаты, приняв, что в положении равновесия они равны нулю  $q_1 = q_2 = \dots = q_s = 0$ . В положении равновесия потенциальная энергия  $U$  имеет стационарное значение, поэтому

$$\left( \frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_0 = 0 \quad (i=1, 2, \dots, s), \quad (3.11)$$

где индекс «0» говорит о том, что частные производные вычисляются при  $q_1 = q_2 = \dots = q_s = 0$ .

Запишем выражение для потенциальной энергии как функции обобщенных координат  $U = U(q_1, q_2, \dots, q_s)$ . Разложим ее в ряд Тейлора в окрестности положения равновесия, ограничившись квадратичными членами

$$U = U_0 + \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial U}{\partial q_i} \right)_0 q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0 q_i q_j. \quad (3.12)$$

Если в положении равновесия потенциальная энергия равна нулю, то  $U_0 = U(0, 0, \dots, 0) = 0$ . С учетом (3.11) потенциальная энергия системы примет вид квадратичной формы обобщенных координат

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s k_{ij} q_i q_j, \quad (3.13)$$

где  $k_{ij} = \left( \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0$  – коэффициенты обобщенных жесткостей. Они обладают свойством симметрии  $k_{ij} = k_{ji}$ .

Рассмотрим сначала дискретно-континуальную систему. Раскладывая вектор перемещения (3.9) в ряд Тейлора вблизи положения равновесия и ограничиваясь линейными членами, получим

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right)_0 q_i, \quad (3.14)$$

где производные  $\left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right)_0$  не зависят от времени.

Тогда вариация перемещения, скорость и ускорение определяются соответственно так:

$$\delta \vec{r} = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right)_0 \delta q_i, \quad (3.15)$$

$$\dot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right)_0 \dot{q}_i, \quad (3.16)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right)_0 \ddot{q}_i. \quad (3.17)$$

Запишем выражение для кинетической энергии системы с учетом (3.16)

$$T = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \dot{\vec{r}}^2 dV = \frac{1}{2} \iiint_V \rho \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right)_0 \dot{q}_i \sum_{j=1}^s \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \right)_0 \dot{q}_j dV \quad (3.18)$$

или

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s m_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (3.19)$$

где  $m_{ij} = \iiint_V \rho \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right)_0 \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \right)_0 dV$  – коэффициенты обобщенных масс. Они обладают свойством симметрии  $m_{ij} = m_{ji}$ .

Запишем выражение для вариации работы распределенных внешних сил  $\vec{p}$  (3.4) с учетом (3.15)

$$\delta A = \iint_S \vec{p} \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right)_0 \delta q_i dS = \sum_{i=1}^s Q_i \delta q_i, \quad (3.20)$$

где  $Q_i(t) = \iint_S \vec{p} \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right)_0 dS$  – обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате  $q_i$ .

Аналогичным образом получают выражения для кинетической энергии дискретной системы и вариации работы сосредоточенных внешних сил  $\vec{P}_k$  (3.6).

В этом случае производные  $\left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right)_0$  заменяются на  $\left( \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right)_0$ , которые определяются из зависимостей (3.8), а интегралы заменяются суммами по всем сосредоточенным массам. В результате коэффициенты обобщенных масс и обобщенные силы записываются соответственно в виде

$$m_{ij} = \sum_{k=1}^N m_k \left( \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right)_0 \left( \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right)_0; \quad (3.21)$$

$$Q_i(t) = \sum_{k=1}^N \vec{P}_k(t) \left( \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right)_0. \quad (3.22)$$

Если дискретно-континуальная система имеет в некоторых точках сосредоточенные массы  $m_k$ , на которые действуют сосредоточенные силы  $\vec{P}_k$ , то в этом случае коэффициенты обобщенных масс представляются в виде

$$m_{ij} = \iiint_V \rho \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right)_0 \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \right)_0 dV + \sum_k m_k \left( \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right)_0 \left( \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_j} \right)_0, \quad (3.23)$$

а обобщенные силы соответственно в виде

$$Q_i(t) = \iint_S \vec{p} \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right)_0 dS + \sum_k \vec{P}_k(t) \left( \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} \right)_0. \quad (3.24)$$

Подставив выражения для потенциальной (3.13) и кинетической (3.19) энергий в уравнения Лагранжа (3.10), получим систему линейных дифференциальных уравнений малых колебаний

$$\sum_{j=1}^s m_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^s k_{ij} q_j = Q_i(t) \quad (i=1, 2, \dots, s). \quad (3.25)$$

Для решения этих уравнений требуется задать начальные условия (в момент времени  $t=0$ ) для обобщенных координат  $q_j$  и обобщенных скоростей  $\dot{q}_j$ .

Запишем систему линейных дифференциальных уравнений (3.25) в матричной форме

$$\overline{M} \ddot{\bar{q}} + \overline{K} \bar{q} = \overline{Q}, \quad (3.26)$$

где  $\overline{M} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1s} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{s1} & m_{s2} & \dots & m_{ss} \end{vmatrix}$  – матрица коэффициентов обобщенных масс;

$\overline{K} = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1s} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{s1} & k_{s2} & \dots & k_{ss} \end{vmatrix}$  – матрица коэффициентов обобщенных жесткостей (матрица жесткости);

$$\bar{q} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_s \end{Bmatrix} \text{ – вектор-столбец обобщенных координат;}$$

$$\bar{\ddot{q}} = \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_s \end{Bmatrix} \text{ – вектор-столбец обобщенных ускорений;}$$

$$\bar{Q} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_s \end{Bmatrix} \text{ – вектор-столбец обобщенных сил.}$$

Матрицы масс  $\bar{M}$  и жесткостей  $\bar{K}$  являются симметричными матрицами, т.е.

$$\bar{M}^T = \bar{M}; \bar{K}^T = \bar{K}, \quad (3.27)$$

где индексом «т» обозначено транспонирование.

Уравнение колебаний (3.26) может быть получено также с использованием так называемых коэффициентов влияния. Рассмотрим дискретную систему. Коэффициентом влияния  $g_{ij}$  называется перемещение  $i$ -й точки от действия единичной силы  $Q_j=1$ , приложенной в  $j$ -й точке и совпадающей по направлению с перемещением  $j$ -й точки, причем  $g_{ij}=g_{ji}$ . При колебаниях системы на нее будут действовать как внешние сосредоточенные силы  $Q_j(t)$ , приложенные в узловых точках, так и силы инерции  $m_j \ddot{q}_j$ , приложенные в тех же точках ( $j=1, 2, \dots, s$ ). Перемещения узловых точек системы будут равны

$$q_i = \sum_{j=1}^s g_{ij} (Q_j - m_j \ddot{q}_j) \quad (i=1, 2, \dots, s). \quad (3.28)$$

Полученные уравнения в матричной форме имеют вид

$$\bar{q} = \bar{G} \bar{Q} - \bar{G} \bar{M} \bar{\ddot{q}}, \quad (3.29)$$

где  $\bar{M} = \begin{Bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_s \end{Bmatrix}$  – диагональная матрица масс;

$$\bar{G} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1s} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{s1} & g_{s2} & \cdots & g_{ss} \end{vmatrix} \quad \text{– матрица гибкости (или податливости) – матрица влияния.}$$

Матрица гибкости является обратной матрице жесткости  $\bar{K} = \bar{G}^{-1}$ . Поэтому при умножении уравнения (3.29) слева на  $\bar{G}^{-1}$  и перегруппировке членов получим уравнение (3.26).

### 3.1.5. Уравнения колебаний упругой системы с бесконечным числом степеней свободы

Бесконечное число степеней свободы имеют расчетные схемы, построенные с использованием континуального подхода, при котором параметры распределены непрерывно.

Выше при решении задач статики рассматривались некоторые континуальные расчетные схемы (стержни, пластины, оболочки), для которых были получены соответствующие дифференциальные уравнения. Эти уравнения в общем случае можно представить в векторной форме:

$$\bar{L}\vec{r} = \vec{p}, \quad (3.30)$$

где  $\vec{r}$  – вектор (вектор-столбец) перемещений точки системы;

$\vec{p}$  – вектор (вектор-столбец) распределенной внешней нагрузки, действующей на элемент системы;

$\bar{L}$  – линейный дифференциальный оператор в виде квадратной матрицы, размерность которой равна размерности векторов  $\vec{r}$  и  $\vec{p}$ .

Для решения задач динамики континуальных расчетных схем необходимо в дифференциальные уравнения статики в соответствии с принципом Д'Аламбера добавить силы инерции:

$$\bar{L}\vec{r} = \vec{p} - m\vec{\ddot{r}}, \quad (3.31)$$

где  $m$  – удельная масса рассматриваемого элемента, отнесенная к единице длины, площади или объема.

При этом граничные условия остаются такими же, как и в задачах статики, но для решения задач динамики с помощью уравнений (3.31) дополнительно должны быть заданы начальные условия (в момент времени  $t=0$ ): векторы перемещений  $\vec{r}$  и векторы скоростей для всех точек системы  $\dot{\vec{r}}$ .

Приведем для примера дифференциальные уравнения поперечных колебаний стержня и пластины, которые получаются из соответствующих дифференциальных уравнений изгиба.



Дифференциальное уравнение поперечных колебаний прямолинейного стержня переменного сечения под действием распределенной поперечной нагрузки  $q(x, t)$  запишется в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = q(x, t) - m_x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (3.32)$$

где  $v(x, t)$  – поперечное перемещение (прогиб стержня);  
 $m_x$  – распределенная по длине (погонная) масса стержня.

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний тонкой изотропной пластины постоянной толщины  $h$  под действием распределенной поперечной нагрузки  $q(x, y, t)$  запишется в виде

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q(x, y, t) - m_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (3.33)$$

где  $w = w(x, y, t)$  – поперечное перемещение (прогиб пластины);  
 $m_{xy} = \rho h$  – распределенная по площади масса пластины;  
 $\rho$  – плотность материала пластины;

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$  – цилиндрическая жесткость пластины;

$E$  – модуль упругости I-го рода материала пластины;

$\mu$  – коэффициент Пуассона материала пластины.

## 3.2. Методы и примеры исследования динамики упругих систем

### 3.2.1. Система с одной степенью свободы

В качестве модели упругой колебательной системы с одной степенью свободы рассмотрим упруго-массовый осциллятор с демпфером вязкого трения (рис. 3.2а).

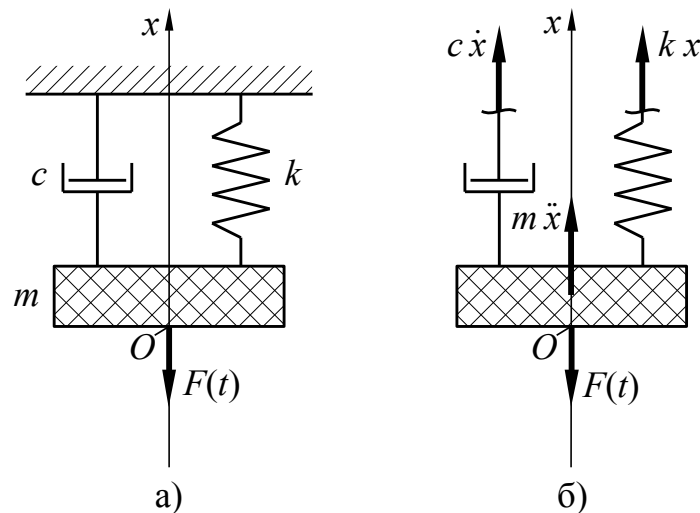


Рис. 3.2. Модель упругой колебательной системы с одной степенью свободы

Данная колебательная система состоит из тела массой  $m$ , закрепленного на неподвижной платформе с помощью пружины с жесткостью  $k$  и демпфера с коэффициентом сопротивления  $c$ .

В общем виде уравнение колебаний для данной системы может быть получено из уравнения (3.25) при  $s=1$

$$m_{11} \ddot{q}_1 + k_{11} q_1 = Q_1(t). \quad (3.34)$$

Обобщенная сила  $Q_1(t)$  складывается из возмущающей силы  $F(t)$  и силы сопротивления, которая пропорциональна скорости перемещения  $\dot{q}_1$  и направлена в сторону, противоположную скорости. Поскольку выше было принято допущение о линейности рассматриваемых колебательных систем, будем считать силу сопротивления линейно зависящей от скорости

$$Q_1(t) = F(t) - c \dot{q}_1. \quad (3.35)$$

Введем систему координат с началом в положении равновесия  $O$  (рис. 3.2). Тогда уравнение колебаний примет вид

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = F(t). \quad (3.36)$$

Это уравнение может быть также получено из условия динамического равновесия всех сил, действующих на тело (рис. 3.2б). Возмущающая сила  $F(t)$  уравновешивается силой упругости пружины  $kx$ , силой сопротивления  $c\dot{x}$  и силой инерции  $m\ddot{x}$ .

Уравнение (3.36) рассматривается с начальными условиями (в момент времени  $t=0$ ): начальным перемещением  $x_0 = x(0)$  и начальной скоростью  $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$ .

Для удобства решения этого уравнения поделим его на массу  $m$  и введем обозначения

$$\ddot{x} + 2\xi \dot{x} + \omega^2 x = f(t), \quad (3.37)$$

где  $\xi = \frac{c}{2m}$  – коэффициент затухания;

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  – круговая частота свободных колебаний системы (собственная частота колебаний) без учета демпфирования;

$$f(t) = \frac{F(t)}{m}.$$

Если возмущающая сила отсутствует, то колебания системы называются **с в о б о д н ы м и**. Они описываются уравнением

$$\ddot{x} + 2\xi \dot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (3.38)$$

Общее решение этого однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$x(t) = e^{-\xi t} (C_1 \sin \tilde{\omega} t + C_2 \cos \tilde{\omega} t), \quad (3.39)$$

где  $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \xi^2}$  – собственная частота колебаний с учетом демпфирования;  
 $C_1, C_2$  – произвольные постоянные, которые определяются из начальных условий.

Используем первое начальное условие

$$x_0 = x(0) = e^{-\xi \cdot 0} (C_1 \sin \tilde{\omega} \cdot 0 + C_2 \cos \tilde{\omega} \cdot 0) = C_2. \quad (3.40)$$

Для использования второго начального условия найдем производную

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} (e^{-\xi t} C_1 \sin \tilde{\omega} t + e^{-\xi t} C_2 \cos \tilde{\omega} t). \quad (3.41)$$

Производная от первого слагаемого

$$\frac{d}{dt} (e^{-\xi t} C_1 \sin \tilde{\omega} t) = -\xi e^{-\xi t} C_1 \sin \tilde{\omega} t + \tilde{\omega} e^{-\xi t} C_1 \cos \tilde{\omega} t \stackrel{(t=0)}{=} C_1 \tilde{\omega}; \quad (3.42)$$

Производная от второго слагаемого

$$\frac{d}{dt} (e^{-\xi t} C_2 \cos \tilde{\omega} t) = -\xi e^{-\xi t} C_2 \cos \tilde{\omega} t - \tilde{\omega} e^{-\xi t} C_2 \sin \tilde{\omega} t \stackrel{(t=0)}{=} -\xi C_2; \quad (3.43)$$

В результате выражение (3.41) при  $t=0$  преобразуется к виду

$$\dot{x}_0 = \dot{x}(0) = C_1 \tilde{\omega} - \xi C_2. \quad (3.44)$$

Используем (3.40)

$$\dot{x}_0 = C_1 \tilde{\omega} - \xi x_0. \quad (3.45)$$

Таким образом, произвольные постоянные в решении (3.39) имеют вид

$$C_1 = \frac{1}{\tilde{\omega}} (\dot{x}_0 + \xi x_0); \quad C_2 = x_0. \quad (3.46)$$

Решение (3.39) может быть записано и в другой, амплитудной форме

$$x(t) = C e^{-\xi t} \sin(\tilde{\omega} t + \varphi), \quad (3.47)$$

где  $C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ ,

$\varphi = \arctg \frac{C_2}{C_1}$  – начальная фаза.

На рис. 3.3 показан график свободных затухающих колебаний. На этом же рисунке показан еще один параметр колебательного процесса – длительность одного цикла колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}}. \quad (3.48)$$

Напомним, что в теории колебаний, изучаемой в дисциплине «Теоретическая механика», различают понятия длительности одного цикла колебаний и периода колебаний, а также понятия размаха колебаний и амплитуды. Период и амплитуда используются для характеристики периодических колебательных процессов (например, гармонических), когда значения колеблющейся величины повторяются через равные промежутки времени. Рассматриваемые здесь зату-

хающие колебания не относятся к периодическим процессам, поэтому в данном случае с методической точки зрения правильнее использовать понятия длительности одного цикла колебаний и размаха колебаний.

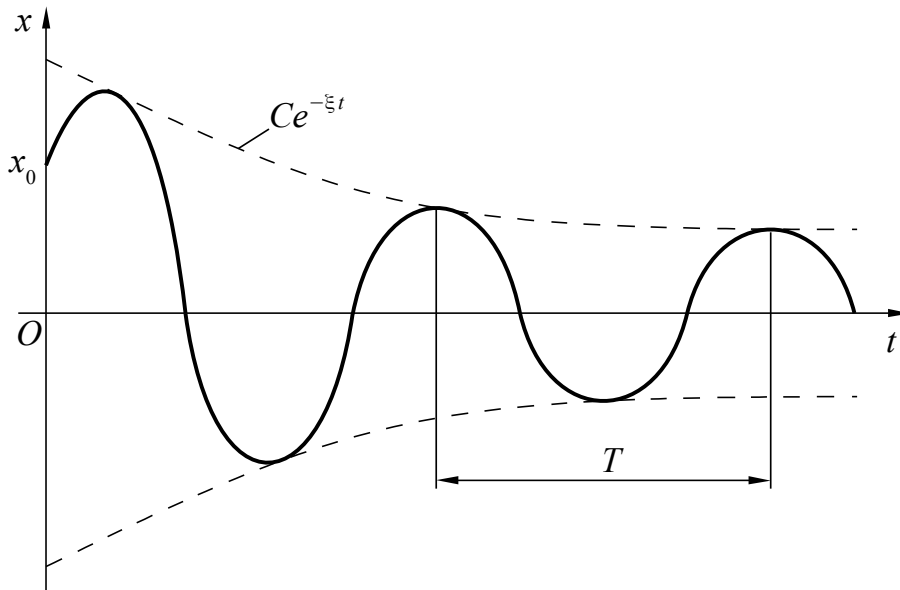


Рис. 3.3. График свободных затухающих колебаний

### 3.2.2. Система с конечным числом степеней свободы

Рассмотрим упругую колебательную систему с конечным числом степеней свободы  $s$ , совершающую свободные колебания без демпфирования. Уравнение колебаний в данном случае получим из уравнения (3.26) с учетом того, что внешние силы отсутствуют

$$\overline{M} \ddot{\bar{q}} + \overline{K} \bar{q} = 0, \quad (3.49)$$

Это уравнение является однородным, оно допускает решения вида

$$\bar{q}(t) = \overline{A} \sin \omega t, \quad (3.50)$$

где  $\overline{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_s \end{pmatrix}$  — вектор-столбец неизвестных амплитуд, который называется

формой колебаний;

$\omega$  — неизвестная частота колебаний.

Подставив решение (3.50) в уравнение (3.49), получим

$$(\overline{K} - \omega^2 \overline{M}) \overline{A} = 0. \quad (3.51)$$

Данное матричное уравнение представляет собой однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных элементов век-

тора-столбца  $\bar{A}$ . Эта система имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю

$$\det(\bar{K} - \omega^2 \bar{M}) = 0. \quad (3.52)$$

Левая часть уравнения (3.52) может быть представлена в виде полинома степени  $s$  относительно  $\omega^2$ , из которого определяются квадраты частот  $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_s^2$ . Их обычно располагают в порядке возрастания. Затем из уравнения (3.51) для каждой частоты  $\omega_i$  можно определить форму колебаний  $\bar{A}_i$  ( $i=1, 2, \dots, s$ ). Таким образом, в рассматриваемой системе в результате определенных начальных возмущений могут происходить гармонические колебания с частотами  $\omega_i$ , каждой из которых соответствует своя форма колебаний  $\bar{A}_i$ . Они называются соответственно собственными частотами и собственными формами колебаний. Совокупность частоты и соответствующей ей формы колебаний называют т о н о м .

### 3.2.3. Системы с бесконечным числом степеней свободы

#### Колебания стержней

Для описания колебаний стержня используем континуальный подход (рис. 3.1а). Выше было получено дифференциальное уравнение поперечных колебаний прямолинейного стержня переменного сечения (3.32). Перепишем это уравнение в следующем виде

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + m_x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q(x, t). \quad (3.53)$$

Решение уравнения (3.53) должно удовлетворять граничным и начальным условиям.

Рассмотрим свободные колебания стержней, т.е. когда внешняя нагрузка отсутствует  $q(x, t) = 0$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + m_x \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \quad (3.54)$$

Это уравнение является однородным, оно допускает решения вида

$$v(x, t) = V(x) \sin \omega t, \quad (3.55)$$

где  $V(x)$  – неизвестная форма колебаний;

$\omega$  – неизвестная круговая частота колебаний.

Подставив решение (3.55) в уравнение (3.54), получим

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI_z \frac{d^2 V}{dx^2} \right) - \omega^2 m_x V = 0. \quad (3.56)$$

Уравнение (3.56) является однородным дифференциальным уравнением четвертого порядка с неизвестным параметром  $\omega$ . Общее решение этого уравнения складывается из четырех линейно независимых решений с неизвестными коэффициентами (произвольными константами). Подстановка этого решения в граничные условия на концах стержня приводит к системе четырех линейных однородных алгебраических уравнений относительно четырех неизвестных коэффициентов. Эта система имеет ненулевое решение, когда ее определитель равен нулю. Приравняв нулю определитель системы, получим частотное уравнение в виде трансцендентного уравнения, зависящего от круговой частоты  $\omega$ . Это уравнение имеет бесчисленное множество корней  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$ , которые являются собственными частотами. Для каждой частоты  $\omega_n$  затем определяются четыре произвольные константы и находится соответствующая форма колебаний  $V_n(x)$ ,  $n=1, 2, \dots$ . Так как задача однородная, то каждая форма колебаний определяется с точностью до произвольной константы. То есть данный метод не позволяет определить реальные перемещения точек стержня при колебаниях, а позволяет определить только его форму.

Рассмотрим для примера собственные колебания стержня постоянного сечения ( $EI_z = \text{const}$ ,  $m_x = \text{const}$ ). В этом случае дифференциальное уравнение (3.56) принимает вид

$$\frac{d^4 V}{dx^4} - k^4 V = 0, \quad (3.57)$$

где  $k^4 = \omega^2 \frac{m_x}{EI_z}$ . (3.58)

Общее решение уравнения (3.57) можно представить в виде

$$V(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 \text{sh} kx + C_4 \text{ch} kx, \quad (3.59)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – произвольные константы.

Пусть стержень по концам имеет шарнирное опирание (рис. 3.4).

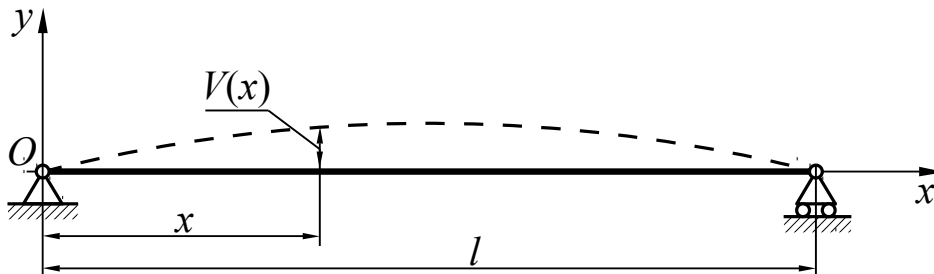


Рис. 3.4. Шарнирно опертый стержень

Граничные условия для такого стержня были рассмотрены выше при исследовании его устойчивости:  $V(0) = V(l) = 0$ ,  $\frac{d^2 V(0)}{dx^2} = \frac{d^2 V(l)}{dx^2} = 0$ .

Подставляя в эти граничные условия решение (3.59), получим систему уравнений

$$V(0) = C_1 \sin k \cdot 0 + C_2 \cos k \cdot 0 + C_3 \operatorname{sh} k \cdot 0 + C_4 \operatorname{ch} k \cdot 0 = C_2 + C_4 = 0; \quad (3.60)$$

$$V(l) = C_1 \sin kl + C_2 \cos kl + C_3 \operatorname{sh} kl + C_4 \operatorname{ch} kl = 0; \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V(0)}{dx^2} &= -C_1 k^2 \sin k \cdot 0 - C_2 k^2 \cos k \cdot 0 + C_3 k^2 \operatorname{sh} k \cdot 0 + C_4 k^2 \operatorname{ch} k \cdot 0 = \\ &= -C_2 + C_4 = 0; \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V(l)}{dx^2} &= -C_1 k^2 \sin kl - C_2 k^2 \cos kl + C_3 k^2 \operatorname{sh} kl + C_4 k^2 \operatorname{ch} kl = \\ &= -C_1 \sin kl - C_2 \cos kl + C_3 \operatorname{sh} kl + C_4 \operatorname{ch} kl = 0. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Из (3.60) и (3.62) вытекает, что  $C_2 = C_4 = 0$ . Поэтому в системе остается два уравнения

$$C_1 \sin kl + C_3 \operatorname{sh} kl = 0; \quad (3.64a)$$

$$-C_1 \sin kl + C_3 \operatorname{sh} kl = 0. \quad (3.64b)$$

Приравняем нулю определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} \sin kl & \operatorname{sh} kl \\ -\sin kl & \operatorname{sh} kl \end{vmatrix} = 2 \sin kl \operatorname{sh} kl = 0. \quad (3.65)$$

Поскольку  $kl \neq 0$ , то  $\sin kl = 0$ . Это значит, что  $kl = n\pi$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Откуда, учитывая выражение для  $k$  (3.58), получим бесконечную последовательность квадратов собственных частот

$$\omega_n^2 = (\pi n)^4 \frac{EI_z}{m_x l^4}. \quad (3.66)$$

При  $kl = n\pi$  из (3.64a) и (3.64b) следует, что произвольная константа  $C_3 = 0$ , т.к.  $C_1 \sin n\pi = 0$ , а  $\operatorname{sh} n\pi \neq 0$ . Тогда из (3.59) с учетом того, что  $C_2 = C_3 = C_4 = 0$ , получим

$$V(x) = C_1 \sin kx. \quad (3.67)$$

Произвольная константа  $C_1$  осталась неопределенной. Однако форму колебаний можно определить, задавшись некоторым значением этой константы, которая, таким образом, задает масштаб отображения амплитуд колебаний.

Пусть  $C_1 = 1$ . Тогда с учетом того, что  $k = \frac{n\pi}{l}$ , формы колебаний можно определить по формуле

$$V_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.68)$$

Практическое значение для оценки прочности авиационных конструкций имеют низшие тона собственных колебаний (обычно определяется не более 50 тонов). Как правило, первый тон дает основную долю нагружения конструкции, поэтому очень важно определить именно его.

Из формулы (3.68) вытекает, что минимальная собственная круговая частота колебаний  $\omega_1$  реализуется при  $n=1$ . Соответствующая форма колебаний показана на рис. 3.4 штриховой линией.

### Колебания пластин

В случае пластин точные решения задачи определения собственных частот и форм колебаний могут быть получены только в некоторых частных случаях, когда дифференциальные уравнения колебаний могут быть решены точно при точно удовлетворенных граничных условиях. Примером такого случая могут служить прямоугольные пластины.

Выше было получено дифференциальное уравнение поперечных колебаний прямоугольной пластины (3.33), которое перепишем в виде

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + m_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t). \quad (3.69)$$

Решение уравнения (3.69) должно удовлетворять граничным и начальным условиям.

Рассмотрим свободные колебания пластины, т.е. при  $q(x, y, t) = 0$

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + m_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (3.70)$$

Для шарнирно опертой по контуру пластины прогиб может быть представлен в форме двойного тригонометрического ряда, аналогичного используемому при рассмотрении вопросов устойчивости пластин (2.52)

$$w(x, y, t) = \sin \omega t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}, \quad (3.71)$$

где  $\omega$  – неизвестная круговая частота колебаний;

$A_{mn}$  – неизвестные коэффициенты;

$a$  и  $b$  – длины сторон пластины.

Подставив решение (3.71) в уравнение (3.70), получим

$$D \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2 - m_{xy} \omega^2 = 0. \quad (3.72)$$

Отсюда получим бесконечное множество квадратов собственных частот



$$\omega_{mn}^2 = \frac{D}{m_{xy}} \left( \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right)^2. \quad (3.73)$$

Из уравнения (3.71) по аналогии с рассмотренным выше стержнем получим соответствующие формы колебаний

$$W_{mn}(x, y) = \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b}. \quad (3.74)$$

Минимальная собственная круговая частота колебаний  $\omega_{11}$  реализуется при  $m=n=1$ . Соответствующая форма колебаний показана на рис. 3.5 штриховыми линиями.

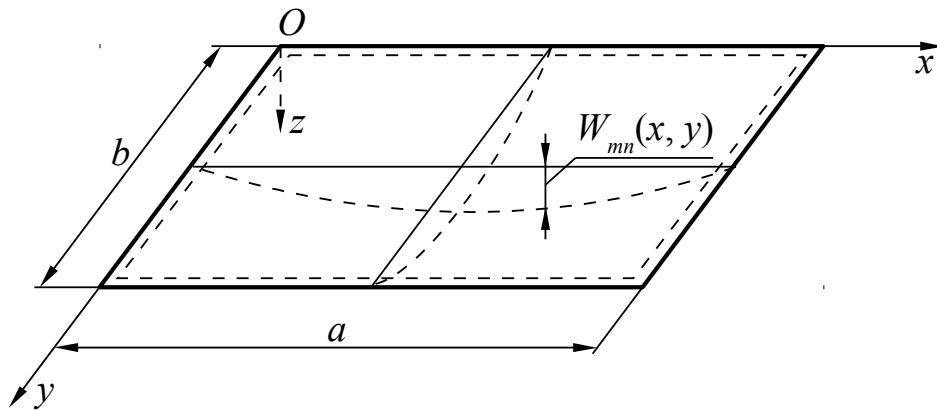


Рис. 3.5. Форма колебаний шарнирно опертой пластины, соответствующая минимальной собственной частоте колебаний

### 3.2.4. Формула Рэля

Пусть упругая колебательная система с конечным числом степеней свободы  $s$  совершает свободные колебания без демпфирования с круговой частотой  $\omega$ . Тогда для каждой обобщенной координаты можно записать

$$q_i(t) = a_i \sin \omega t \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (3.75)$$

Перепишем выражения (3.13) и (3.19) соответственно для потенциальной  $U$  и кинетической  $T$  энергий системы с учетом (3.75)

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s k_{ij} a_i a_j \sin^2 \omega t; \quad (3.76)$$

$$T = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s m_{ij} a_i a_j \cos^2 \omega t. \quad (3.77)$$

Когда система в процессе колебаний проходит положение равновесия  $q_i(t) = 0$ , ее потенциальная энергия (3.76) равна нулю, а кинетическая энергия (3.77) максимальна. Значит в этом случае  $\sin^2 \omega t = 0$ , а  $\cos^2 \omega t = 1$ . Тогда можно записать

$$U=0; T=T_{\max}=\frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^s\sum_{j=1}^sm_{ij}a_ia_j. \quad (3.78)$$

В крайних положениях наоборот потенциальная энергия максимальна, а кинетическая равна нулю. В этом случае  $\sin^2\omega t=1$ , а  $\cos^2\omega t=0$

$$U=U_{\max}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^s\sum_{j=1}^sk_{ij}a_ia_j; T=0. \quad (3.79)$$

Используя закон сохранения энергии ( $U_{\max}=T_{\max}$ ), получим формулу Рэлея для квадрата собственной круговой частоты колебаний рассматриваемой системы

$$\omega^2=\frac{\sum_{i=1}^s\sum_{j=1}^sk_{ij}a_ia_j}{\sum_{i=1}^s\sum_{j=1}^sm_{ij}a_ia_j}. \quad (3.80)$$

На основе формулы Рэлея установлены следующие принципы:

- из всех возможных форм колебаний истинными формами будут те, которые сообщают дроби Рэлея стационарное значение;
- форма колебаний, соответствующая низшей собственной частоте, сообщает дроби Рэлея минимальное значение

$$\omega_1^2=\min\left[\frac{\sum_{i=1}^s\sum_{j=1}^sk_{ij}a_ia_j}{\sum_{i=1}^s\sum_{j=1}^sm_{ij}a_ia_j}\right]. \quad (3.81)$$

Формула Рэлея дает точное значение собственной частоты колебаний, если вектор-столбец  $\bar{A}$  точно представляет соответствующую форму колебаний. Если низшую форму колебаний аппроксимировать некоторой заданной формой, то по формуле (3.81) можно получить приближенное завышенное значение низшей собственной частоты колебаний.

С использованием формулы (3.80) Рэлеем были доказаны теоремы о влиянии изменений массы и жесткости системы, а также наложенных на нее дополнительных связей:

- увеличение массы системы уменьшает или в крайнем случае не изменяет ее собственные частоты;
- увеличение жесткости и наложение идеальных геометрических связей приводят к увеличению собственных частот системы или в крайнем случае оставляют их без изменения.

Формулу Рэлея можно применить и для систем с бесконечным числом степеней свободы. Рассмотрим для примера колебания стержня постоянного сечения ( $EI_z=\text{const}$ ,  $m_x=\text{const}$ ) длиной  $l$ .

В качестве выражения для потенциальной энергии используем (2.32) с учетом того, что  $EI_z = \text{const}$

$$U = \frac{1}{2} EI_z \int_0^l \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx. \quad (3.82)$$

Выражение для кинетической энергии (3.18) перепишем с учетом того, что  $m_x = \text{const}$

$$T = \frac{1}{2} m_x \int_0^l \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 dx. \quad (3.83)$$

Перепишем формулы для потенциальной и кинетической энергий с учетом выражения для прогиба при колебаниях (3.55)

$$U = \frac{1}{2} EI_z \sin^2 \omega t \int_0^l \left[ \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \right]^2 dx; \quad (3.84)$$

$$T = \frac{1}{2} m_x \omega^2 \cos^2 \omega t \int_0^l V^2(x) dx. \quad (3.85)$$

Как и предыдущем случае потенциальная энергия  $U$  максимальна, когда  $\sin^2 \omega t = 1$ , а кинетическая энергия  $T$  максимальна, когда  $\cos^2 \omega t = 1$

$$U_{\max} = \frac{1}{2} EI_z \int_0^l \left[ \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \right]^2 dx; \quad (3.86)$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m_x \omega^2 \int_0^l V^2(x) dx. \quad (3.87)$$

Откуда получим выражение для квадрата собственной круговой частоты колебаний рассматриваемой системы

$$\omega^2 = \frac{EI_z \int_0^l \left[ \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \right]^2 dx}{m_x \int_0^l V^2(x) dx}. \quad (3.88)$$

### 3.2.5. Метод матричной итерации

Метод матричной итерации позволяет путем последовательных приближений определить первый тон колебаний.

Рассмотрим систему с конечным числом степеней свободы.

Суть метода матричной итерации заключается в следующем. Матричное уравнение колебаний системы (3.51) приводится к виду

$$\frac{1}{\omega^2} \bar{A} = \bar{D} \bar{A}, \quad (3.89)$$

где  $\bar{D} = \bar{K}^{-1} \bar{M}$ .

Далее выбирается произвольная исходная форма  $\bar{A}_0$ . Например, в точке  $k$  задается значение  $a_{0k} = 1$ , а в остальных точках  $a_{0i} = 0$ . По мере выполнения приближений (итераций) форма  $\bar{A}_j$  будет изменяться (индекс « $j$ » – порядковый номер приближения), но ее необходимо всегда делать нормированной к амплитуде точки  $k$ . Это означает, что элементы нормированного вектора  $\bar{A}_j^{\text{норм}}$  должны получаться делением вычисленных значений  $a_{ji}$  на  $a_{jk}$

$$\bar{A}_j^{\text{норм}} = \frac{1}{a_{jk}} \bar{A}_j. \quad (3.90)$$

В результате на  $k$ -м месте в нормированном векторе  $\bar{A}_j^{\text{норм}}$  будет стоять единица ( $a_{jk}^{\text{норм}} = 1$ ).

Матричное уравнение колебаний (3.89) разобьем на два

$$\bar{\Phi} = \bar{D} \bar{A}, \quad (3.91a)$$

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{\omega^2} \bar{A}, \quad (3.91b)$$

введя некоторый вектор-столбец  $\bar{\Phi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$ .

Получим вектор-столбец  $\bar{\Phi}_{j+1}$  на новом шаге приближения (в том числе на первом шаге), используя уравнение (3.91a)

$$\bar{\Phi}_{j+1} = \bar{D} \bar{A}_{j+1}^{\text{норм}}. \quad (3.92)$$

При этом должно выполняться условие, вытекающее из (3.91b)

$$\bar{\Phi}_{j+1} = \frac{1}{\omega_{j+1}^2} \bar{A}_{j+1}^{\text{норм}}. \quad (3.93)$$

Пронормируем вектор-столбец  $\bar{\Phi}_{j+1}$

$$\bar{\Phi}_{j+1}^{\text{норм}} = \frac{1}{\varphi_{(j+1)k}} \bar{\Phi}_{j+1}. \quad (3.94)$$

С учетом уравнения (3.93) получим

$$\bar{\Phi}_{j+1}^{\text{норм}} = \frac{1}{\varphi_{(j+1)k} \omega_{j+1}^2} \bar{A}_{j+1}^{\text{норм}}. \quad (3.95)$$

Это равенство выполняется, если  $\varphi_{(j+1)k} \omega_{j+1}^2 = 1$ . Откуда

$$\omega_{j+1}^2 = \frac{1}{\varphi_{(j+1)k}}. \quad (9.96)$$

Это значит, что

$$\bar{A}_{j+1}^{\text{норм}} = \frac{1}{\varphi_{(j+1)k}} \bar{\Phi}_{j+1}. \quad (9.97)$$

Таким образом, последовательность вычислений следующая:

1) задаемся произвольной исходной формой колебаний, например, в виде

$$\bar{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix};$$

2) вычисляем  $\bar{\Phi}_1 = \bar{D} \bar{A}_0$ ;

3) нормируем  $\bar{A}_1^{\text{норм}} = \frac{1}{\varphi_{1n}} \bar{\Phi}_1$ ;

4) вычисляем  $\bar{\Phi}_2 = \bar{D} \bar{A}_1^{\text{норм}}$ ;

5) нормируем  $\bar{A}_2^{\text{норм}} = \frac{1}{\varphi_{2n}} \bar{\Phi}_2$

и т.д. до тех пор, пока  $\varphi_{jn}$  и  $\varphi_{(j-1)n}$  не будут различаться на наперед заданную малую величину;

б) вычисляем частоту

$$\omega_j = \sqrt{\frac{1}{\varphi_{jn}}}. \quad (9.98)$$

Таким образом, получим собственную частоту  $\omega$  и соответствующую форму колебаний  $\bar{A}$ .

Описанный выше процесс последовательных приближений всегда сходится по частоте и форме колебаний к результату, соответствующему первому тону (т.е. к низшей частоте и соответствующей ей форме колебаний) независимо от вида исходной формы  $\bar{A}_0$ .

Аналогичный процесс последовательных приближений может быть построен и для определения высших (2-го и т.д.) тонов колебаний. Для определения, например, 2-го тона колебаний необходимо исключить для данной системы возможность колебаний по 1-му тону. Для этого на систему как бы накладывают дополнительную связь и приводят ее к системе с меньшим на единицу числом степеней свободы. Для определения 3-го тона колебаний необходимо исключить возможность колебаний по 1-му и 2-му тонам и т.д.

### Вопросы для самопроверки

1. Что такое оболочка?
2. Охарактеризуйте безмоментное напряженное состояние оболочки.
3. Дайте определение срединной поверхности оболочки.
4. Дайте определение главным направлениям срединной поверхности оболочки.
5. Какие линии называются линиями главных кривизн срединной поверхности оболочки?
6. Как задается срединная поверхность оболочки вращения?
7. Что такое меридианы и параллели срединной поверхности оболочки вращения?
8. В каком направлении в первую очередь образуется трещина в цилиндрической оболочке при нагружении ее избыточным внутренним давлением?
9. Из каких элементов состоит подкрепленная тонкостенная оболочка?
10. Что называется контуром поперечного сечения оболочки?
11. Какие виды контуров поперечного сечения оболочки Вы знаете?
12. Какие силовые факторы возникают в поперечном сечении подкрепленной тонкостенной оболочки?
13. Перечислите допущения и гипотезы балочной теории оболочек.
14. Как производится редуцирование сечения оболочки по материалу?
15. Выведите формулу для нормальных напряжений в поперечном сечении оболочки.
16. Что такое поток касательных сил и в каких случаях им удобно пользоваться?
17. Как связаны поток касательных и касательные напряжения в оболочке?
18. Выведите общую формулу для потока касательных сил в поперечном сечении оболочки.
19. Выведите формулу для определения потока касательных сил в оболочках с открытым контуром поперечного сечения.
20. Что такое центр изгиба, центр жесткости, ось изгиба, ось жесткости?
21. Выведите формулу для определения потока касательных сил в оболочках с однозамкнутым контуром поперечного сечения.
22. Выведите формулу для определения потока касательных сил в оболочках с многозамкнутым контуром поперечного сечения.
23. Что такое статическая устойчивость упругой системы?
24. При каких условиях происходит потеря устойчивости упругой системы?
25. Дайте определение критической нагрузки в соответствии со статическим подходом.
26. Дайте определение критической нагрузки в соответствии с энергетическим подходом.

27. Выведите формулу для определения критических нормальных напряжений потери устойчивости стержня.
28. От чего зависят критические нормальные напряжения потери устойчивости стержня?
29. Как изменятся критические нормальные напряжения потери устойчивости стержня при увеличении его длины?
30. При каких видах нагружения возможна потеря устойчивости пластины?
31. Выведите формулу для определения критических нормальных напряжений потери устойчивости прямоугольной пластины при сжатии вдоль одной оси.
32. От чего зависят критические нормальные напряжения потери устойчивости прямоугольной пластины при сжатии вдоль одной оси?
33. Выведите формулу для определения критических касательных напряжений потери устойчивости прямоугольной пластины при сдвиге.
34. От чего зависят критические касательные напряжения потери устойчивости прямоугольной пластины при сдвиге?
35. Как определяются критические нагрузки потери устойчивости прямоугольной пластины при сжатии вдоль двух осей?
36. Как определяются критические нагрузки потери устойчивости прямоугольной пластины при одновременном действии сжатия и сдвига?
37. В чем суть континуального, дискретного и дискретно-континуального подходов к исследованию динамики упругих конструкций?
38. В чем состоит принцип Д'Аламбера–Лагранжа?
39. Выведите общие уравнения колебаний упругой системы с конечным числом степеней свободы.
40. Выведите общие уравнения колебаний упругой системы с бесконечным числом степеней свободы.
41. Выведите уравнения колебаний упругой системы.
42. Запишите уравнение колебаний системы с одной степенью свободы.
43. Как решается задача определения собственных частот и форм колебаний упругой системы с конечным числом степеней свободы?
44. Как решается задача определения собственных частот и форм колебаний упругой системы с бесконечным числом степеней свободы?
45. Выведите формулу Рэлея для систем с конечным и бесконечным числом степеней свободы.
46. Изложите суть метода матричной итерации для определения собственных частот и форм колебаний системы с конечным числом степеней свободы.

## Литература

1. **Вибрации** в технике: справочник: в 6 т. / ред. совет: В.Н. Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1978. – Т. 1. Колебания линейных систем / под ред. В.В. Болотина, 1978.
2. **Добронравов В.В. и др.** Курс теоретической механики: учебник для вузов. – изд. 3-е, перераб. – М.: Высшая школа, 1974.
3. **Страхов Г.И., Чунарева Н.Н.** Строительная механика самолета. – М.: МИИГА, 1983.
4. **Строительная механика** летательных аппаратов: учебник для авиационных специальностей вузов / под ред. И.Ф. Образцова. – М.: Машиностроение, 1986.
5. **Феодосьев В.И.** Сопротивление материалов: учебник для вузов – изд. 9-е, перераб. – М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.