СТРУКТУРА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

(на примере математической модели разбега самолета Ан-2)

Действуем по алгоритму

1► изучение оригинала:

- выявление основных факторов, особенностей,
- выявление **диапазонов** исследуемых параметров,
- выявление **условий и задач** исследования,
- постановка (формулировка) задачи исследования,
- оценка требуемой **точности**;

2► феноменологическое описание оригинала ("физическое" описание):

- поиск **аналогий и функциональных** зависимостей на основе предыдущего этапа и достижений в различных областях **науки**;

1) Динамика полета
2) Аэродинамика
3) ТАД
4) Теория трения
5) РЛЭ

3► *математическое описание* оригинала

- функциональные соотношения, на которых основана математическая модель - взаимосвязь элементов и параметров объекта (законы и закономерности);
- методы вычисления требуемых параметров;
- совокупность числовых и функциональных данных объекта (характеристики; начальные, граничные, конечные условия; ограничения)

Функциональные соотношения

$$\frac{d(mV)}{dt} = P - X_a - F$$

Предположения и допущения

1) Динамика полета
2) Аэродинамика
3) ТАД
4) Теория трения
5) РЛЭ
6) m = const
7) ВПП – горизонт.
8) Р || ВПП
9) Возмущений нет

Функциональные соотношения

$$m\frac{dV}{dt} = P - X_a - F$$

$$V = \frac{dL}{dt}$$

Предположения и допущения

1) Динамика полета
2) Аэродинамика
3) ТАД
4) Теория трения
5) РЛЭ
6) m = const
7) ВПП – горизонт.
8) Р || ВПП
9) Возмущений нет
10) Верт.движ.нет

Функциональные соотношения

$$m\frac{dV}{dt} = P - X_a - F$$

$$V = \frac{dL}{dt}$$

$$0 = Y_a + N - mg$$

Предположения и допущения

1) Динамика полета
2) Аэродинамика
3) ТАД
4) Теория трения
5) РЛЭ
6) m = const
7) ВПП – горизонт.
8) Р || ВПП
9) Возмущений нет
10) Верт.движ.нет
11) Попер.движ.нет
12) Вращения нет
13) α = const

Предположения и допущения

1) Динамика полета
2) Аэродинамика
3) ТАД
4) Теория трения
5) РЛЭ
6) m = const
7) ВПП – горизонт.
8) Р || ВПП
9) Возмущений нет
10) Верт.движ.нет
11) Попер.движ.нет
12) Вращения нет
13) α = const
14) МСА, Н = 0
15) Аппроксимация Р

Функциональные соотношения

$$m\frac{dV}{dt} = P - X_a - F$$

$$V = \frac{dL}{dt}$$

$$0 = Y_a + N - mg$$

$$P = P_0\left(1 - aV - bV^2\right)$$

Функциональные соотношения

$$m\frac{dV}{dt} = P - X_a - F$$

$$V = \frac{dL}{dt}$$

$$0 = Y_a + N - mg$$

$$P = P_0\left(1 - aV - bV^2\right)$$

$$F = fN$$

$$X_a = c_{xa}\frac{\rho V^2}{2}S$$

$$Y_a = c_{ya}\frac{\rho V^2}{2}S$$

Методы вычисления требуемых параметров

$$V_{отр} = \sqrt{\frac{2mg}{c_{уа}\rho S}}$$

$$T_{разб} = \begin{cases} \frac{1}{B}(\ln|A + BV_{отр}|) - \frac{1}{B}\ln|A| & при\ C = 0, \\ \frac{-2}{B + 2CV_{отр}} + \frac{2}{B} & при\ C \neq 0\ и\ B^2 = 4AC, \\ \frac{1}{\sqrt{B^2 - 4AC}}\left(\ln\left|\frac{2CV_{отр} + B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2CV_{отр} + B + \sqrt{B^2 - 4AC}}\right| - \ln\left|\frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}\right|\right) & при\ \ C \neq 0\ \ и\ \ B^2 > 4AC, \\ \frac{2}{\sqrt{4AC - B^2}}\left(arctg\left|\frac{2CV_{отр} + B}{\sqrt{4AC - B^2}}\right| - arctg\left|\frac{B}{\sqrt{4AC - B^2}}\right|\right) & при\ \ C \neq 0\ \ и\ \ B^2 < 4AC. \end{cases}$$

$$L_{разб} = \begin{cases} \frac{1}{B}\left(V_{отр} - AT_{разб}\right) & при\ \ C = 0, \\ \frac{1}{2C}\left(\ln\left|A + BV_{отр} + CV_{отр}^2\right| - \ln|A| - BT_{разб}\right) & при\ \ C \neq 0. \end{cases}$$

Данные

– плотность воздуха $\rho = 1{,}225$ кг/м;

– коэффициент трения качения колес шасси по ВПП $f = 0{,}035$;

– масс самолета $m = 5250$ кг;

– площадь крыла $S = 71{,}5$ м^2;

– аэродинамические коэффициенты: $c_{xa} = 0{,}3$; $c_{ya} = 1{,}5$;

– взлетная тяга двигателя при нулевой скорости $P_0 = 2000$ кгс;

– коэффициенты аппроксимации тяги: $a = 0{,}002$ с/м, $b = 0{,}0002$ с^2/м^2;

и начальные условия для интегрирования дифференциальных уравнений: при $t = 0$: $V = 0$, $L = 0$

Алгоритмы перевода данных

в данном примере перевод данных осуществляется с коэффициентами подобия равными единице, т.е. непосредственно, если не считать правила округления в пределах точности измерений

(масштаб 1:1)

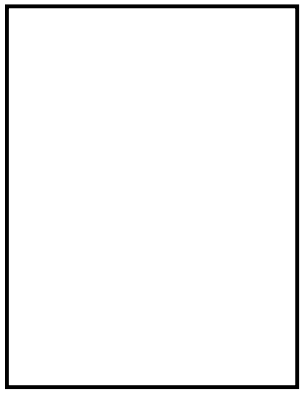
П-теорема

Размерные и безразмерные величины

$L + t = ?$

$a + b = p/2$

$$\frac{L}{t} = V$$



<u>Единица измерения</u> физической величины D (**<u>размерность</u>**), обозначается с помощью квадратных скобок: например, [D] = м

Основные единицы измерения СИ (**независимые**):

– **метр** [м] – мера длины,

– **килограмм** [кг] – мера массы,

– **секунда** [с] – мера времени,

– **ампер** [А] – мера силы электрического тока,

– **кельвин** [°К] – мера термодинамической температуры,

– **моль** [моль] – мера количества вещества,

– **кандела** [кд] – мера силы света.

Дополнительные единицы измерения (безразмерные):

плоских углов – **радиан** [рад],

телесных углов – **стерадиан** [ср].

Остальные размерные единицы принято называть **производными**. Они получаются из основных с помощью физических законов. Например, единица мощности N Ватт [Вт] получается применением следующих формул известных законов механики, использующих понятия работы, силы, массы и ускорения:

$$N = \frac{A}{t} = \frac{Fs}{t} = \frac{mas}{t}; \quad \text{откуда} \quad [N] = Вт = \frac{кг \cdot м^2}{c^3}.$$

Все основные законы природы в любой системе единиц измерения описываются **степенными комплексами**:

$$z = x_1^{y_1} \cdot x_2^{y_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{y_n},$$

– произведениями размерных параметров x_i, определяющих изучаемое явление, со своими числовыми показателями степеней y_i.

Нетрудно видеть, что выражение:

$$\Pi = \frac{z}{x_1^{y_1} \cdot x_2^{y_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{y_n}}$$

безразмерно, так как числитель и знаменатель его должны иметь одну и ту же размерность в силу записи закона природы.

Следствие из П-теоремы:

Для функционального описания изучаемого явления достаточно выбрать параметры, которые его характеризуют, и составить из них все возможные **критерии подобия** (***безразмерные степенные комплексы***).

Замечание 1. П-теорема – мощное средство математического моделирования, но не являющееся панацеей. Получить с ее помощью принципиально новые законы природы невозможно, так как необходимо **знать размерности всех** основных определяющих параметров.

Замечание 2. Система определяющих явление параметров должна быть **полной**. Если это не так, то можно и не получить требуемый критерий подобия.

Замечание 3. Безразмерный коэффициент k не зависит от размерных параметров. Для подобных детерминированных моделей критерии подобия общие, как и математическое описание. Поэтому для применения найденного соотношения в математическом описании достаточно определить k эмпирически – в процессе *идентификации* модели.

Имитационные модели

***Стохастическое* (*имитационное*)**
моделирование
позволяет **имитировать** работу оригинала.

Элементарным примером этого может служить выбор одного из двух исходов с помощью подбрасывания монетки.

Единичный жребий

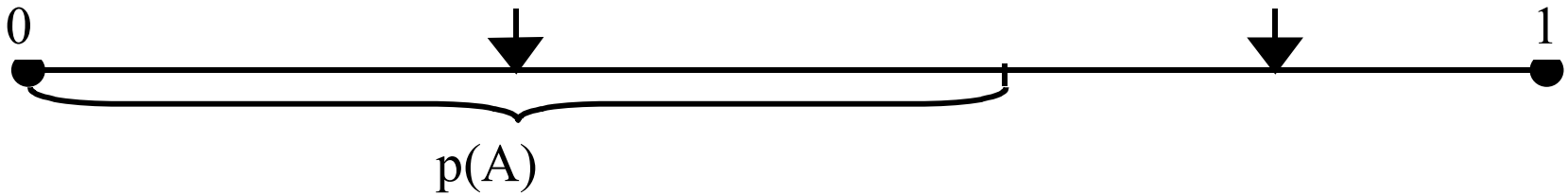
Любой опыт со случайным исходом, который **отвечает** на один из следующих вопросов:

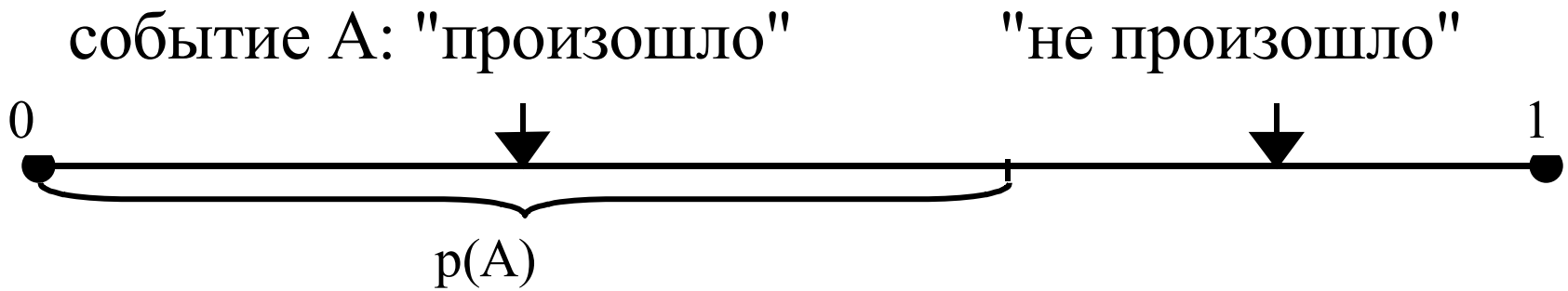
– "произошло" или "не произошло" (якобы) определенное событие A;

– какое событие из *полной группы несовместных* событий {A, B,..., C} "произошло" (якобы);

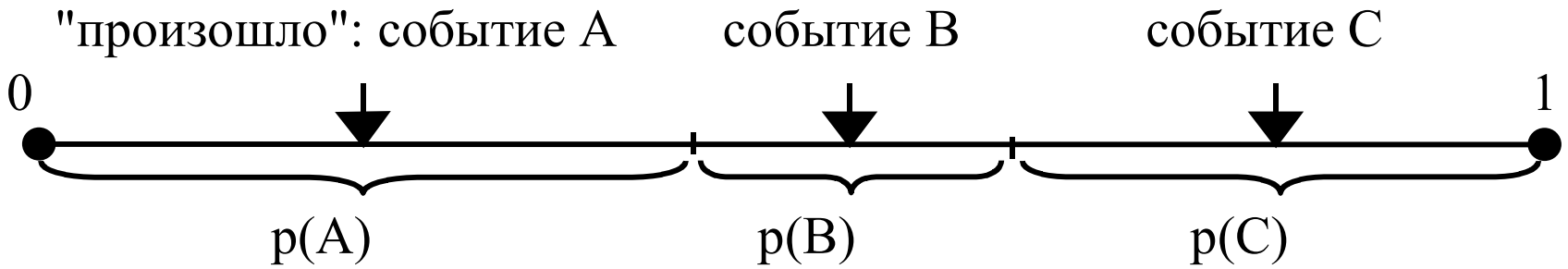
– какое значение "приобрела" случайная величина (якобы).

Для ответа на **первый вопрос** единичного жребия необходимо знать вероятность события A: p(A) = p.



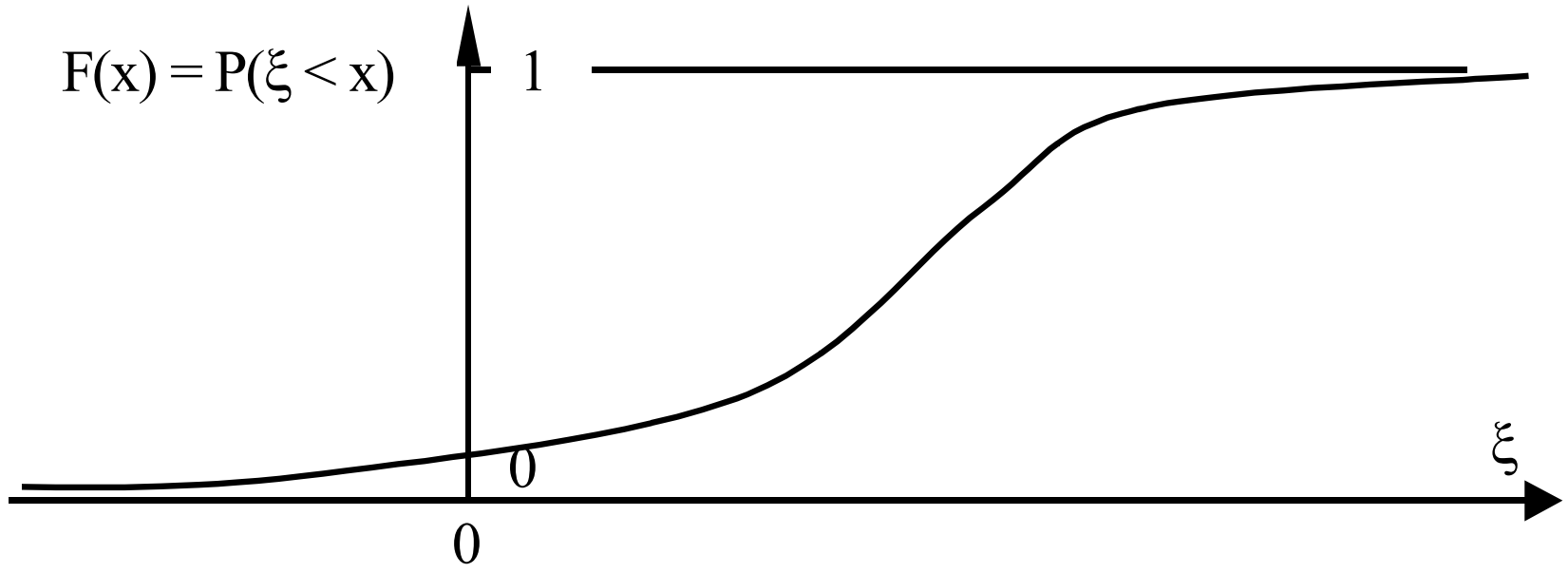

событие А: "произошло"
"не произошло"
0
1
p(A)

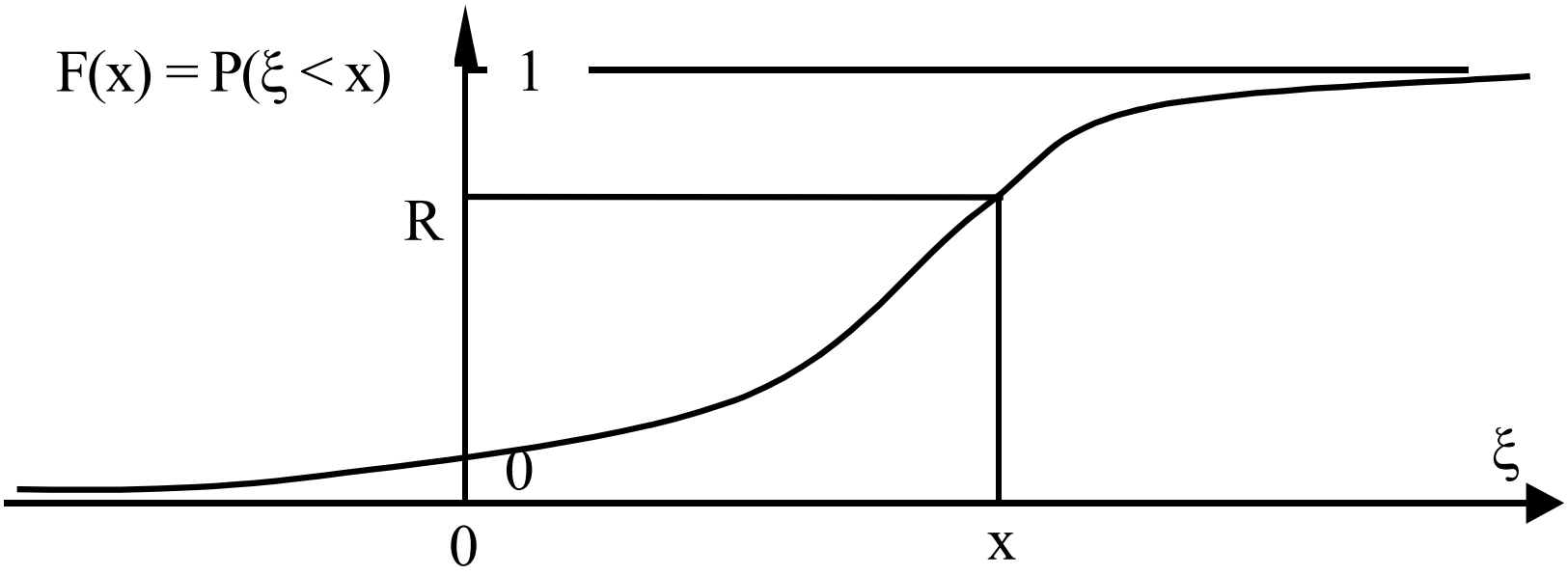
Ответ на **второй вопрос** единичного жребия можно построить аналогичным образом



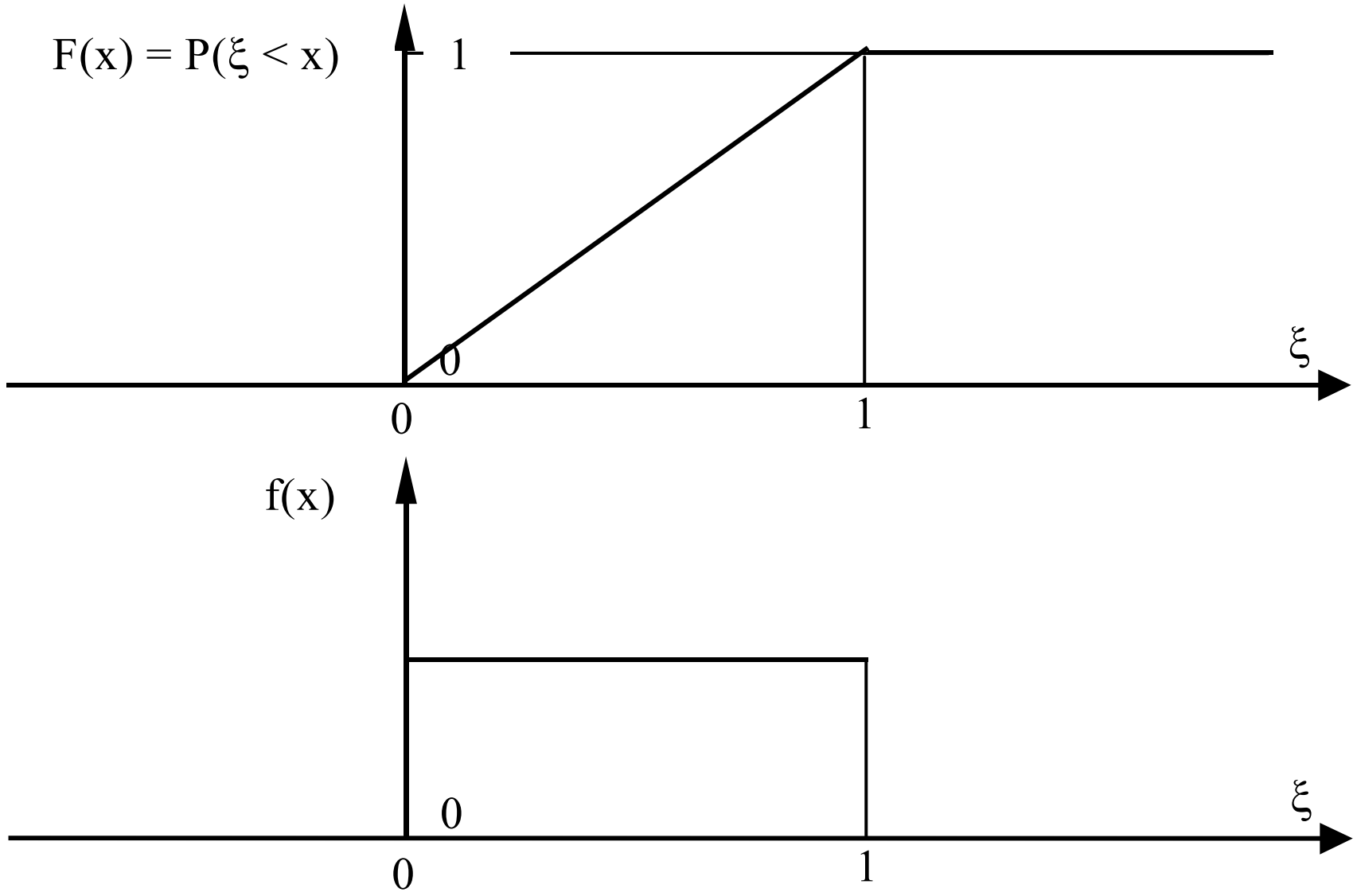
В **третьем случае**, если случайная величина дискретна, то процедура сводится к предыдущей.

Непрерывная случайная величина задается законом распределения в виде интегральной функции распределения:




F(x) = P(ξ < x)
1
R
0
0
x
ξ

Случайное число R – **случайная величина, равномерно распределенная** на интервале [0, 1].



Случайное число можно получить:

– бросанием монеты – в двоичном виде;

– с помощью рулетки в казино, размеченной, например, простыми десятичными дробями;

– из таблиц случайных чисел (с любого места таблицы берется непрерывная последовательность чисел);

– "датчиком случайных чисел" на ЭВМ ("псевдослучайное число" – случайная величина, распределенная **почти** равномерно на [0, 1] и принимающая конечное множество значений, определенное разрядной сеткой ЭВМ).

Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) – **розыгрыш** случайных событий – включает в себя три этапа:

– получение случайного числа R,

– отождествление его с вероятностью,

– розыгрыш единичного жребия.

Пример имитации аэродрома

Интервалы времени между очередными подлетами самолетов к ВПП Δt_C – случайная величина. Время, в течение которого ВПП занята совершающим посадку самолетом, $\Delta t_З$ – тоже случайная величина. Статистической обработкой результатов наблюдения за этими процессами получены интегральные функции распределения:

$\Delta t_З$, мин	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$F_2(\Delta t_з)$	0	0,01	0,02	0,05	0,19	0,40	0,67	0,85	0,96	0,99	1

$\Delta t_З$, мин	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$F_2(\Delta t_з)$	0	0,01	0,02	0,05	0,19	0,40	0,67	0,85	0,96	0,99	1

Замечание 1. Математическое описание имитационных моделей содержит описание **случайных процессов** (**стохастических**), т.е. законы распределения, и использует ***корреляционные, дисперсионные и регрессионные модели***, а также ***модели массового обслуживания*** и ***метод статистических испытаний (метод Монте-Карло)***.

Замечание 2. Имитационные математические модели позволяют обнаружить **новые свойства**, явно не заложенные в математическое описание или имеющие очень малую вероятность появления.

Замечание 3. Так как основой имитационных моделей являются законы распределения случайных величин (или вероятностные характеристики случайных явлений), получаемые из наблюдения за оригиналом, то вопрос о проверке ***адекватности*** отпадает: нет смысла проверять соответствие сымитированной и наблюдаемой реализаций случайных процессов, построенных на одном и том же законе распределения.